LA RÈGLE A CALCUL

PAR

J. BIGOT

Pharmacien nîmois

AVANT-PROPOS

La règle à calcul est certainement un merveilleux instrument pour tous ceux qui, dans leur travail ou leurs occupations, sont obligés de recourir aux calculs simples ou complexes. C'est donc l'outil indispensable de l'ingénieur comme du négociant, du géomètre comme du comptable.

Pourtant la règle à calcul n'est pas toujours appréciée à sa juste valeur et son emploi par les techniciens n'est pas aussi généralisé qu'il devrait l'être. Ces faits sont dus à ce que d'aucuns reprochent aux calculs faits à la règle de manquer de précision. Il est vrai que celle-ci est limitée, quoique certains artifices permettent de l'accroître sensiblement, sans grande difficulté. Mais nous croyons pouvoir affirmer que la raison principale qui empêche de recourir plus souvent à la règle à calcul réside dans la difficulté de fixer correctement la place de la virgule, lorsque le calcul prend une forme quelque peu complexe dont l'ordre de grandeur du résultat ne peut être connu intuitivement. Plusieurs méthodes ont déjà tenté de donner, dans ce but, des règles plus ou moins heureuses; mais on peut reprocher à toutes les méthodes déjà connues, ou bien une grande difficulté d'application parce que découlant des principes mathématiques trop élevés, ou bien encore un manque de souplesse qui l'empêche de se généraliser aisément à toutes les formes de calculs. Enfin, un défaut qui n'est pas négligeable : la méthode est quelquefois difficile à retenir, surtout si l'usager de la règle reste quelque temps sans s'en servir. C'est pour obvier à toutes ces imperfections que nous présentons cette méthode simple dont nous faisons usage depuis plus de trente ans, et qui montrera tout le profit que l’on peut et doit tirer d'une règle à calcul, quand son maniement en est devenu simple et sûr.

Cette méthode est avant tout rationnelle, car ses lois découlent directement de celles des logarithmes, comme la règle elle-même en est dérivée. Elle est d'une application facile et possède sur tous les autres procédés un avantage considérable. Grâce à une écriture ordonnée faite au cours des calculs les plus compliqués, elle permet à celui qui a opéré de se faire contrôler par une tierce personne. Celle-ci pourra, non seulement corriger la faute éventuelle, mais la localiser: de cette manière l'erreur commise pourra être évitée lors d'un calcul ultérieur.

Enfin, la méthode présente est essentiellement mnémonique, car toutes ses lois peuvent se condenser en une formule tellement logique et simple, qu'on peut s'en souvenir, même après des années de non-emploi de la règle.

Dans l'exposé de cette méthode, nous avons tenté de mettre le plus de clarté possible en détaillant avec soin l'opération fondamentale : la multiplication, dont toutes les autres sont des applications dérivées. Nous avons indiqué, à côté du mécanisme même du jeu des coefficients, l'écriture logique que l'on doit adopter pour en tirer tout le bénéfice pratique, de la vérification par soi-même, ou par un tiers. On verra que ce contrôle est aussi facile et important que la classique preuve par 9.

En dehors des nombreux exemples illustrant les explications, on trouvera après chaque chapitre des exercices judicieusement choisis qui permettront au lecteur un entraînement progressif.

Ce dernier ne devra consulter les résultats consignés à la fin de l'ouvrage qu'après avoir effectué les calculs avec attention et s'être contrôlé lui-même.

Naturellement le présent ouvrage ne prétend pas épuiser le sujet, Il ne fait que passer en revue les principales opérations simples et combinées, mais d'autres extensions sont encore possibles que le lecteur ayant bien assimilé cette méthode trouvera aisément par la suite.

Pour terminer, qu'il nous soit permis de souhaiter que l'enseignement du maniement de la règle à calcul, trop négligé jusqu'à présent, soit un jour introduit légalement en bonne place, dans les classes préparatoires aux grandes Ecoles.

Nous osons espérer que la présente méthode, par sa simplicité et sa précision, apportera alors à ces futurs élèves toute la science calculatrice dont ils auront besoin au cours de leurs études.

AVERTISSEMENT

La méthode des coefficients, applicable aux calculs effectués avec la règle à calcul, a été exposée pour la première fois en 1945. On peut aujourd'hui affirmer qu'elle a été adoptée par des milliers de techniciens conquis par sa simplicité et son efficacité. En outre, le fait que de nombreux professeurs d'écoles techniques aient d'eux-mêmes décidé d'enseigner cette méthode à leurs élèves prouve bien qu'ils en ont reconnu la valeur et même qu'elle comble une lacune dans ce domaine de l'enseignement. Enfin l'intérêt que des techniciens de plusieurs pays étrangers ont témoigné à l'égard de cet ouvrage, montre que le voeu exprimé à la fin de l'avant-propos est en voie de réalisation, d'une manière encore plus large que prévue, puisqu'on peut maintenant penser que cette méthode deviendra un jour d'un emploi universel, pour la plus grande satisfaction des usagers de la règle.

La règle à calcul, que l'on pourrait croire dépassée par le développement prodigieux des machines à calculer, voit cependant sa vitalité affirmée par l'apparition de nouveaux modèles modernes mis sur le marché depuis une dizaine d'années. Les règles à double face, qui avaient disparu depuis longtemps, sont revenues grâce à l'emploi des matières plastiques, avec une précision de fabrication remarquable et apportent ainsi de nouvelles et riches possibilités. Il était donc nécessaire d'étendre le champ d'application de la méthode des coefficients à l'usage des nouvelles échelles de ces règles, savoir: les échelles décalées et les échelles log-log (positives et négatives) sans oublier les échelles de lignes hyperboliques.

Cette édition comporte donc deux parties : la première traitant de la (toujours classique) règle de Rietz, la deuxième plus spécialement de la règle à double face. Par ailleurs l'ouvrage a été modifié profondément pour atteindre plusieurs objectifs.

Tout d'abord, l'écriture typographique a été mise en harmonie avec les symboles et abréviations normalisés, tant pour les notations mathématiques que pour la désignation des échelles (lettres gravées sur les règles). Ensuite le texte a été remanié pour donner encore plus de concision et de clarté aux procédés de calculs exposés, ceux-ci ayant, en outre, été reclassés dans un ordre plus logique facilitant leur assimilation successive.

Enfin, les tableaux synoptiques à la fin de l'ouvrage sont présentés avec une écriture symbolique simple qui permet mieux de retrouver rapidement la manipulation elle-même, la lecture des résultats et les coefficients qui y sont affectés.

TABLE DES MATIÈRES

DEUXIÈME PARTIE. Règle à double face.

TROISIÈME PARTIE. Récapitulation

GÉNÉRALITÉS

CHAPITRE 1

SYMBOLES ET NOTATIONS ABRÉGÉES

Afin de simplifier l'écriture, il est fait usage dans le cours du texte de cet ouvrage et dans les tableaux synoptiques (in fine), en plus des notations algébriques usuelles, de certaines notations abrégées particulières, résumées ci-après.

1..Echelles de la règle.

Les différentes échelles sont désignées par les lettres normalisées, que l'on trouve gravées à l'extrémité de toute règle moderne et qui sont:

►Échelles des carrés : **A** pour la règle, **B** pour la réglette.
►Échelles des nombres . **C** pour la réglette, **D** pour la règle.
►Échelle des cubes : **K**.
►Échelle des logarithmes : **L**
►Échelles décalées des nombres : **CF** pour la réglette, **DF** pour la règle.
►Échelles des inverses, désignée par la lettre I accolée à celle de l'échelle directe, soit **CI**, **DI**, **CIF**, etc.
►Échelles des angles pour les lignes trigonométriques : **S** pour sinus, **T** pour tangente, **ST** pour arc, sinus ou tangente des petits angles.
►Échelles log-log: **LL0**, **LL1**, **LL2**, **LL3**, directes positives, **LL00**, **LL01**, **LL02**, **LL03**, inverses négatives.

►Échelles des arguments pour lignes hyperboliques **Sh 1**, **Sh 2**, sinus; **Th**, tangente.

►Échelle des cosinus ou de Pythagore: **P**.

Pour désigner plus particulièrement une des sections des échelles des carrés ou des cubes, on a ajouté après la lettre symbole, un chiffre indiquant leur ordre dans le sens de lecture (gauche à droite) de l'échelle, ce qui donne **B1** et **B2** ou **K1**, **K2** et **K3** ; une autre signification plus caractéristique de l'indice sera donné dans le texte relatif à chacune de ces échelles.

Pour chacune des moitiés des échelles **CF** et **DF** dont la valeur centrale est commune, on a porté en indice la valeur de la division extrême, ce qui conduit à **DF3**, moitié gauche et **DF36**, moitié droite.

2. Index.

On désigne par le terme « Index » toutes les valeurs d'extrémité des échelles des nombres, qui ont par conséquent pour valeur: 1, 10 ou un multiple de 10.

Tout index particulier est par suite désigné par sa valeur suivie de la lettre d'échelle correspondante. On aura ainsi: 1C, 1D, 10C, 10D pour **C** et **D**; 1A, 1B, 10A, 10B, 100A, 100B pour **A** et **B** ; 1 K, 10K. 100K et 1000K pour **K**. Pour les échelles décalées dont le 1 est unique et central on a seulement 1CF, 1DF et 1CIF. Enfin pour les échelles inverses **CI** et **DI**, on a également 1CI, 1DI et 10CI, 10DI. Il ne faudra pas oublier, pour bien placer ces valeurs, que les échelles inverses se lisent de droite à gauche : c'est d'ailleurs pour le rappeler au lecteur que les fabricants de règle ont pris la précaution de marquer en rouge les chiffres et quelquefois les divisions de toutes les échelles inverses, celles de log-log comprises.

3. Trait central du curseur.

Le curseur dont est munie toute règle comporte au centre de sa largeur un trait-vertical gravé qui couvre la totalité des échelles. Il sert donc, en le plaçant sur une division quelconque de l'une des échelles, à lire le nombre correspondant de n'importe laquelle des autres. Il sera désigné, en abrégé par **Tc**, et servira le plus souvent à fixer sur une échelle un résultat partiel ou à lire le résultat du calcul.

4. Écriture symbolique des tableaux.

Les tableaux synoptiques figurant à la fin de l'ouvrage permettront au lecteur d'y retrouver ultérieurement la manipulation et les coefficients relatifs aux principaux calculs simples ou complexes, dont il aura oublié le procédé. La pose des facteurs donnés, sur les échelles adéquates et l'endroit où se lit le résultat sont indiqués par une écriture symbolique, dont on comprendra le sens par les **exemples types suivants** :

► *Pose du premier facteur: T*c*/ *x*A

lecture : placer le trait du curseur sur la valeur *x* de l'échelle des carrés (règle).

► *Pose du deuxième facteur: *y*C/Tc

lecture : placer la valeur *y* de l'échelle. des nombres (réglette) sous le trait du curseur.

► *Résultat lu sur: A1/ 10B

lecture : sur la première section de l'échelle des carrés (règle) en face de l'index 10 de l'échelle des carrés (réglette).

► *Pose de : 1CI/*x*D

lecture : l'index 1 de l'échelle des inverses (réglette) sur la valeur *x* de l'échelle des nombres (règle).

► *Résultat lu sur : K2/Tc

lecture : sur la deuxième section de l'échelle des cubes, et sous le trait du curseur.

On remarque que la barre inclinée s'interprète par : « sur », « sous» ou encore « en face de », si l'on préfère ce sens plus général. Quant à l'index 1C, par exemple, il n'est qu'une valeur particulière de *x*C, écriture adoptée dans les tableaux pour toute valeur de l'échelle C.

CHAPITRE 2

HISTORIQUE DE LA RÈGLE DE CALCUL

C'est à Jean NEPER (1550-1617), mathématicien écossais que l'on doit l'invention des logarithmes. C'est lui qui en publia les premières listes; mais c'est surtout son contemporain BRIGGS qui poursuivit les calculs et fit éditer des tables complètes de logarithmes des nombres de 1 à 1000 avec 14 décimales. Cette invention devait permettre des calculs impossibles jusqu'alors par la seule arithmétique et eut une portée considérable sur l'avancement des sciences astronomiques, où les calculs sont aussi complexes que fréquents.

C'est un autre mathématicien anglais Edmond GUNTER (1581-1626) qui eut, trois ans après, en 1620, l'idée de graver sur une règle en cuivre des longueurs proportionnelles aux mantisses des nombres de 1 à 10 ; avec les pointes d'un compas GUNTER arrivait à effectuer une multiplication.

En 1621, l'idée fut perfectionnée par William OUGHTRED (1575-1660) qui utilisa côte à côte deux réglettes portant les mêmes graduations. Puis ce fut Robert BISSAKER qui donna à la règle sa forme logique avec corps et réglette coulissante. Mais la première règle, de fabrication industrielle, peut-être attribuée à James WATT, qui fit réaliser la " Soho Slide Rule » pour les besoins de ses ingénieurs en 1779.

Cependant de nombreux inventeurs apportaient à la règle des améliorations successives dont les principales furent

En 1722, l'échelle des cubes, par WARNER.

En 1755, l'échelle des inverses, par EVERARD.

En 1815, l'échelle exponentielle, par Peter Roget

En 1850, l'échelle des carrés, par Mannheim, qui en outre adopta définitivement le curseur.

C'est ainsi que la règle Mannheim peut être considérée comme la première des règles modernes (1850) et dont la grande diffusion est due à Etienne Lenoir (1744-1832) dont les machines à graver furent, par leur précision, une des raisons de son succès.

En 1902, l'ingénieur Max Rietz (1872-1956) donne à la règle un nouvel essor, grâce au système qui a gardé son nom et consistant à rapporter les échelles des lignes trigonométriques à celle des nombres, au lieu des carrés, d'où une précision accrue. Le système « Darmstadt », imaginé en 1934 par le Dr Alwin Walther marque encore un progrès appréciable sur la précédente.

Enfin ces dernières années sont apparues les règles à double face, déjà réalisées en 1891 par William Cox, mais abandonnées depuis longtemps. Ces règles ultra-modernes représentent en quelque sorte la sommation de tous les progrès antérieurs et sont véritablement un outil de calcul très complet et au maniement agréable.

Et c'est ainsi qu'après plus de deux cents ans de perfectionnements successifs, la règle à calcul à conquis une place de première importance dans la vie de l'homme moderne, qu'elle gardera d'ailleurs encore longtemps, malgré l'apparition des machines à calculer électroniques.

CHAPITRE 3

PRINCIPE DE LA RÈGLE A CALCUL

1. Rappel des notions de logarithmes.

►Considérons la suite des nombres entiers commençant par zéro et formant une progression arithmétique de raison 1 (chaque terme est égal au précédent augmenté de 1).

(1) 0 1 2 3 4 5……..*n*……

►Considérons également une autre suite commençant par 1 et formant une progression géométrique de raison 10 (chaque terme est égal au précédent multiplié par 10).

(2) 1, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000.….1 (*n* fois 0)….

►Faisons correspondre chaque terme de la première suite à chaque terme de la deuxième. Nous disons par définition que le nombre de la première suite est le logarithme dans un système à base 10 du nombre de la deuxième suite.

Ainsi 2 est le logarithme de 100. On écrit 2 = lg 100
4 est le logarithme de 10 000. On écrit 4 = lg 10 000.

►Faisons le produit de deux termes de la deuxième suite, soit:
100 x 1000 = 100 000. Nous pouvons constater que : lg 100 = 2, lg 1000 = 3, lg 100000 = 5; on en déduit: puisque 2 + 3 = 5, lg 100 + lg 1000 = lg 100 000.

►Pour trouver le produit de deux nombres, il suffit donc d'additionner leurs logarithmes et de rechercher le nombre correspondant au logarithme somme. La multiplication est donc remplacée par une addition si l'on sait trouver le logarithme d'un nombre quelconque et vice-versa.

►Considérons à nouveau la deuxième suite et un nombre quelconque situé par exemple entre 10 et 100, soit : 40, on peut aisément comprendre que son logarithme sera compris entre 1 et 2, ce sera donc un nombre décimal. Choisissons plus précisément le nombre qui soit exactement la moyenne géométrique entre 10 et 100 c'est-à-dire $\sqrt{10 \times 100} = 31{,}6$, son logarithme sera, lui, la moyenne arithmétique entre 1 et 2, soit :

$$\frac{1+2}{2} = 1{,}5.$$

►Ceci nous montre que par des rapports géométriques pour la deuxième suite et arithmétiques pour la première, on peut calculer de proche en proche les logarithmes de tous les nombres entiers. Cependant, lors de ce calcul, nous pouvons remarquer que deux nombres occupant la même place par rapport aux multiples de 10, ont dans leurs logarithmes une partie de valeur commune : c'est celle après la virgule. En effet, prenons le nombre $\sqrt{100 \times 1000} = 316$, le logarithme est : $\frac{2+3}{2} = 2{,}5.$ la partie décimale pour 31,6 ou 316 est toujours 0,5.

►On donne le nom de « **mantisse** » à ce chiffre nécessairement inférieur à 1. Le chiffre qui précède la virgule prend le nom de « **caractéristique** ».

La deuxième suite peut s'écrire également :

(3) 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, ……….10^n………….

On peut donc dire que le logarithme d'un nombre est l'indice de la puissance de 10 qui donne ce nombre : 2 est logarithme de

10^2 et 1,5 = lg $10^{1,5}$ = lg 31,6.

►On en déduit aussi que la caractéristique du logarithme d'un nombre quelconque est la même que pour la puissance de 10 précédente. Pour 31,6 elle est 1 (10^1) ; pour 316, elle est 2 (10^2) , etc....

►<u>La mantisse</u>, par contre, ne peut se trouver que par de longs calculs. Pour les éviter, on aura recours aux tables de logarithmes qui donnent le résultat avec 3, 5 ou 7 décimales.

De la propriété découverte ci-dessus nous pouvons déduire les lois fondamentales régissant l'emploi des logarithmes **(1)** :

$$\log (a \times b) = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log a^n = n \log a$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} = \log a$$

►En résumé, nous remplaçons, grâce au logarithme, les multiplications par des additions, les divisions par des soustractions, les élévations aux puissances par des multiplications, et enfin les extractions de racine par des divisions.

Voici maintenant les règles pratiques pour trouver la caractéristique du logarithme d'un nombre quelconque.

1° Pour les nombres supérieurs à 1, la caractéristique est égale au nombre de chiffres qui précèdent la virgule, *moins un* :

Exemples : lg 27,5 = 1,………….. (deux chiffres).
lg 3 754,6 = 3,………. (quatre chiffres).

2° Pour les nombres inférieurs à 1, la caractéristique est négative et égale au nombre de zéros qui précèdent le premier chiffre significatif (c'est-à-dire différent de zéro).

Exemples : lg 0,707 = $\bar{1}$,………….. (un zéro).
lg 0,005 7 = $\bar{3}$,……….. (trois zéros).

(1) On emploie le symbole lg lorsqu'il s'agit des logarithmes à base 10 ou décimaux. (Ceux qui viennent d'être définis). Il existe d'autres systèmes de logarithmes et l'on emploie le le symbole log pour les formules valables avec des logarithmes de base quelconque.

Le signe - se met sur le chiffre et non devant car il n'affecte que la caractéristique, la mantisse restant, elle, toujours positive. Comme nous le verrons plus loin, toutes ces propriétés des logarithmes que nous avons rappelées succinctement sont utilisées dans notre méthode et il était nécessaire de les repasser en revue.

2. La règle à calcul.

La mesure des longueurs est certainement une des premières que l'homme ait effectuées. Depuis longtemps il s'ait additionner et soustraire des longueurs. Pour mesurer, par exemple, la longueur d'un tuyau, on se sert d'un mètre gradué que l'on pose à son côté, puis comme le tuyau est plus long on reportera encore 30 cm pour arriver à son extrémité. On dit que la longueur total est de 130 cm, parce qu'on a additionné les nombres 100 et 30 exprimant la mesure des deux longueurs mises bout à bout. Imaginons que nous. fassions la, même addition de deux longueurs dont l'une représente lg 2 et l'autre lg 3 (*fig. 1*), la longueur somme représentera donc lg 2 + lg 3 = lg (2 x 3) = lg 6. Grâce à ce procédé on aura donc trouvé

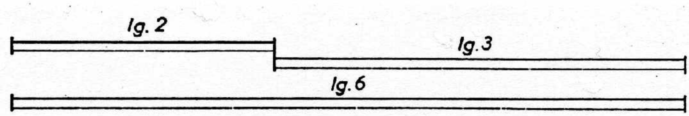

FIG. 1.

le produit de 2 par 3. La règle qui permet de faire ces opérations comportera donc deux longueurs graduées, non en cm ou en mm, mais en proportion du logarithme du nombre correspondant à sa gravure. Pour pouvoir ajouter une des longueurs au bout de la première, l'une des échelles ainsi constituée sera mobile le long de l'autre. La partie fixe appelée règle servira à y pointer le multiplicande ou premier facteur du produit ; la partie mobile appelée réglette servira à y lire le multiplicateur ou deuxième facteur, et la somme des deux longueurs sera lue sur la première échelle et donnera le produit cherché.

La règle et la réglette sont par conséquent graduées de 1 à 10 avec des subdivisions, et proportionnellement au logarithme du nombre correspondant. Les nombres que l'on peut lire sur les échelles d'une règle sont des nombres décimaux de 1 à 10 tels que 1,75 - 3,45 - 7,24, etc. Ceci est très important et on ne doit jamais l'oublier. Cela nous amène d'ailleurs à formuler le lemme suivant qui est à la base même de l'emploi de la règle à calcul, et sur lequel est fondée cette méthode.

Lemme. - Les opérations que permet la règle à calcul par lecture directe sont limitées aux nombres compris entre 1 et 10, tant pour les facteurs que leur produit ou quotient.

Alors, direz-vous, l'usage de la règle est bien restreint. Que non pas : grâce à des subterfuges nous saurons en étendre le champ d'action d'une façon illimitée, et nous en verrons bientôt les applications. En attendant, constatons que le principe de base de la règle est vraiment des plus simples, mais qu'ils n'a pu être trouvé qu'après la géniale invention des logarithmes.

CHAPITRE 4

LES DIVERS TYPES DE RÈGLE A CALCUL

Sur toutes les règles, de quelque type qu'elle soient, on trouvera les deux échelles fondamentales des nombres graduées proportionnellement aux logarithmes des nombres de 1 à 10, dont l'une est fixe sur le corps de la règle alors que l'autre, mobile sur la réglette, peut coulisser le long de la première. Ces échelles couvrant la longueur totale de la règle assureront aux calculs la plus grande précision possible.

►La règle dite de MANNHEIM (fig. 2), première en date des règles modernes (1850), mais quelque peu désuète aujourd'hui, comportait au-dessus des échelles précédentes, une double échelle (règle et réglette) graduée en raison de la moitié du logarithme des nombres. Il y a de ce fait deux échelles de même longueur graduées de 1 à 10 qui portent le nom d'échelles des carrés, de par leurs propriétés principales. Un curseur avec glace et trait gravé, permettait de faire la correspondance de lecture entre les différentes échelles.

La réglette portait à son verso trois autres échelles dont la lecture était rendue possible par des encoches aux extrémités de la règle, et un index gravé sur leurs bords biseautés, à savoir (fig. 3) :

► **-** une échelle graduée en angles de 35’, à 90°, permettant le calcul des sinus. Symbole **S** ;

► **-** une deuxième graduée en angles de 5°45, à 45° pour le calcul des tangentes. Symbole **T** ;

► **-** une troisième au centre donnant les mantisses des logarithmes des nombres. Symbole **L**.

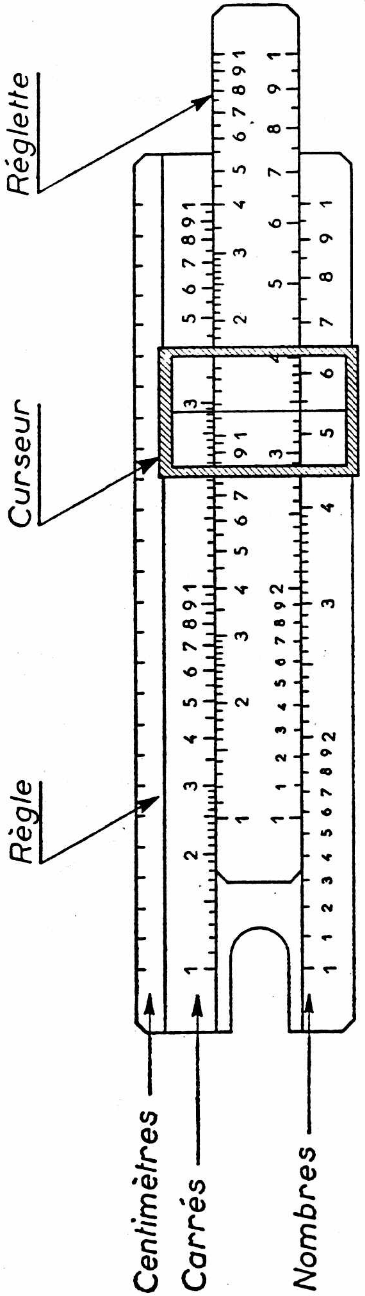

FIG. 2. — Règle de MANNHEIM.

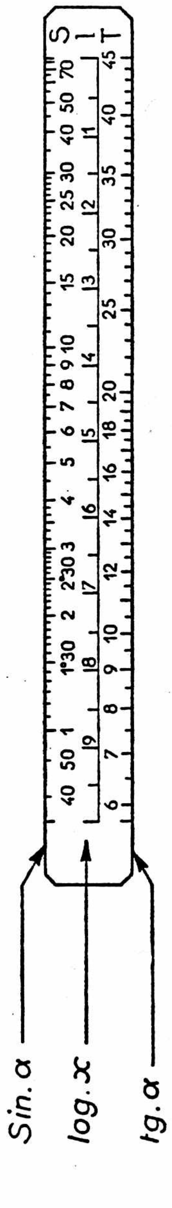

FIG. 3. — Verso de la réglette.

►La règle dite de RIETZ (*fig. 4*), est devenue depuis sa création (1902), le modèle le plus employé, parce que plus complète et plus pratique que la précédente. De celle-ci, elle a conservé, la structure, avec des échelles complémentaires qui sont :

- l'échelle des cubes, en général en haut de la règle,
- l'échelle des inverses, au centre de la réglette.

De plus, l'échelle des logarithmes a été reportée sur la règle, en général, en bas.

Sur le verso de la réglette, se trouvent encore des échelles graduées en angles, mais légèrement différentes des précédentes (*fig. 5*), soit :

-une échelle de 5° 45', à 90° pour le calcul des sinus,

- une autre de 5° 45' à 45° pour celui des tangentes,

- une troisième de 35', à 5° 45', pour celui des arcs, sinus ou tangentes des petits angles.

►La règle dite « ELECTRO » de création plus récente ajoutait aux principes de la RIETZ une échelle spécialisée, pour le calcul du rendement des moteurs et génératrices électriques ainsi que deux échelles log-log, pour le calcul des valeurs exponentielles, rencontrées en électricité.

►La règle BEGHIN (*fig. 6*) et la règle UNIVERSELLE (*fig 7.*) furent imaginées pour augmenter la souplesse des calculs, en éliminant les produits hors règle grâce à l'emploi d'échelle décalées de $\sqrt{10}$ suivant le procédé préconisé par BEVAN (1817).

►Enfin, on a vu apparaître depuis quelques années, des règles ultra-modernes dites « à double face» dont le principe, très ancien, avait été abandonné, mais qui se trouve aujourd'hui applicable avec perfection, grâce à l'emploi des matières plastiques. Ces règles offrant une grande surface de gravure, pour de nombreuses échelles, réunissent finalement les avantages des règles de RIETZ, ELECTRO et BEGHIN et deviennent ainsi un outil de calcul très complet et très agréable à manier.

En outre, ce modèle de règle a permis de réaliser plus

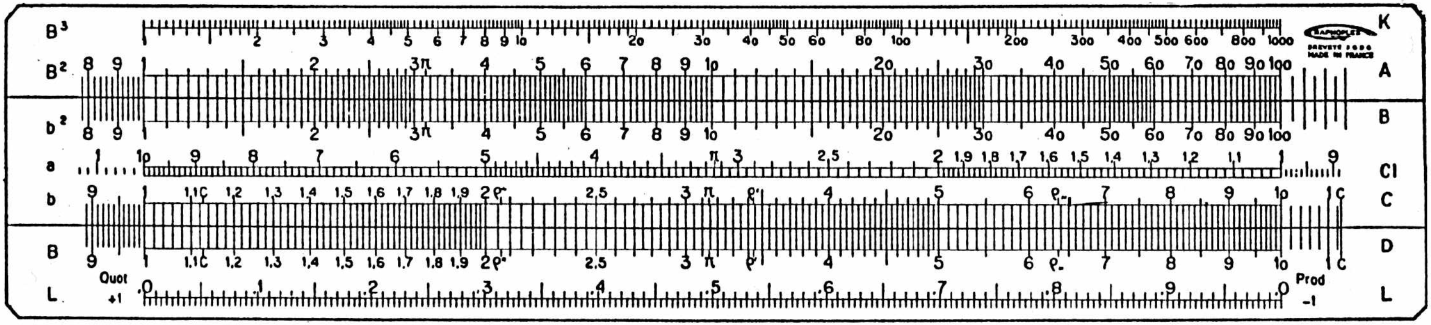

FIG. 4. — Règle de RIETZ.

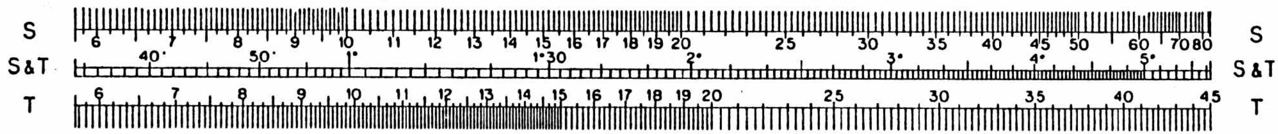

FIG. 5. — Verso de la réglette.

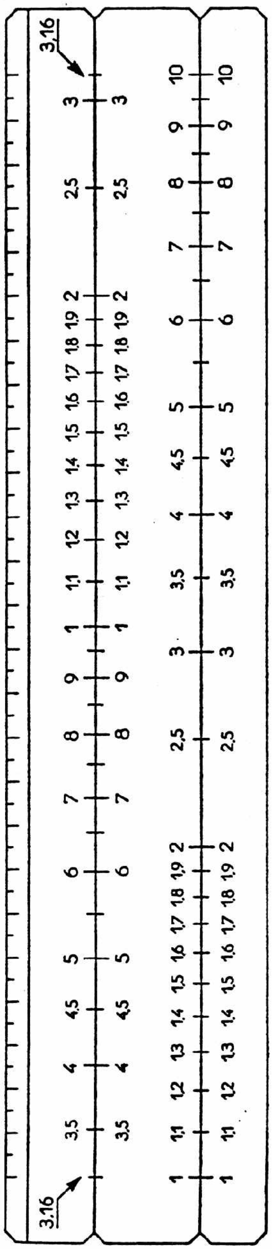

FIG. 6. — Règle de BÉGHIN.

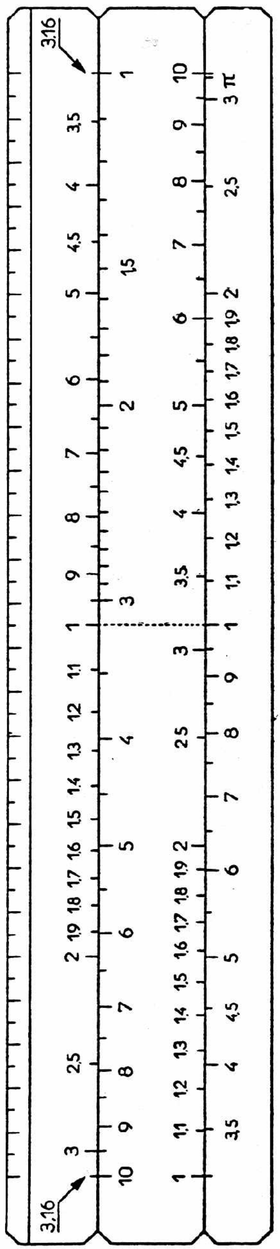

FIG. 7. — Règle UNIVERSELLE.

facilement des règles spécialisées qui conservent, malgré tout, les possibilités de la RIETZ. C'est ainsi qu'on trouve, entre autres : la règle HYPERBOLOG, pour le calcul des lignes hyperboliques ; la règle géomètre pour les calculs géodésiques ; la règle architecte pour le calcul des poutres ou planchers en béton armé, etc...

Nous supposons maintenant que le lecteur possède une règle sur laquelle il pourra suivre les explications et les exemples donnés au cours de l'exposé de la méthode, fait dans les chapitres suivants. Dans le cas contraire, nous pouvons lui conseiller l'acquisition d'une règle de RIETZ, convenant à tous les calculs classiques, ou d'une règle à double-face moderne,à la fois 'plus souple d'emploi et plus complète puisqu'elle comprend les échelles exponentielles.

CHAPITRE 5

LECTURE DES ÉCHELLES D'UNE RÈGLE (Règles Mannheim et Rietz. Longueur de 25 cm)

La face supérieure d'une règle de RIETZ comprend cinq types de graduations,que **nous désignerons comme suit** (*fig 4*) :

1. L'échelle du bas de la règle est celle des logarithmes, soit **L**.

2. L'échelle au-dessus est celle des nombres et se trouve gravée sur la règle et la réglette, Nous les appellerons respectivement **D** et **C**.

La graduation C est donc mobile avec la réglette.

3. Au milieu de la réglette se trouve l'échelle des récîproques ou inverses : **CI**.

4. Au-dessus de celle-ci sont les deux échelles de carrés portées sur règle et réglette, soit **A** et **B**.

5. Enfin, tout en haut de la règle, est l'échelle des cubes, **K**.

Tout ce que nous dirons est valable pour la règle MANNHEIM qui comprend les échelles A B C D sur le dessus.

1° Échelle des nombres, CD (MANNHEIM ou RIETZ).

Considérons l'échelle des nombres **CD** (1) (Règle fermée). Les longueurs étant proportionnelles aux logarithmes, nous constatons que la distance entre 1 et 2 n'est pas égale à

(1) Sur certaines règles de fabrication récente, l'échelle proprement dite est prolongée sur sa gauche et sur sa droite par quelques divisions supplémentaires. Nous ne tiendrons jamais compte de cette nouveauté qui apporte quelques facilités dans le maniement de la règle et nous supposerons toujours les échelles commençant à 1 et finissant à 10.

celle entre 2 et 3 ni à celle entre 4 et 5, etc... Les chiffres 1 2 3 4 5 6 7 8 et 9 sont faciles à situer, puisqu'ils sont gravés en face du trait ; 10 est souvent marqué à l'extrémité droite par un simple 1.

La distance entre 1 et 2 est divisée d'abord en dix sections numérotées à chaque trait de 1 à 9 (*fig. 8*), ce qui

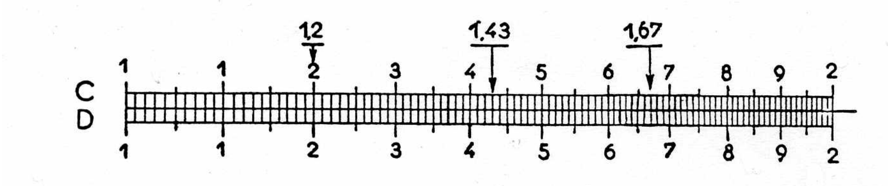

FIG. 8.

permet de lire 1,1 - 1,2 . . . . . 1,9. L'espace entre chaque petit chiffre est subdivisé en dix parties comme un centimètre. Cela nous donne donc la possibilité de lire la centième partie de l'espace entre 1 et 2. Le troisième trait à droite de 4 indiquera le nombre 1,43; le septième à droite du 6 : 1,67.

Remarque Importante. - Nous tenons à souligner dès à présent que d'après le lemme qui est à la basé même du principe de la règle on ne peut lire que des nombres de 1 à 10.

Donc,contrairement à ce qu'indiquent d'autres ouvrages, la division correspondant à 1,67 ne peut être lue 16,7 pas plus que 167. Si malheureusement le lecteur a déjà pris cette fâcheuse habitude, il faut qu'il s'efforce de la perdre au plus vite.

Les distances entre les chiffres 2 et 3 puis 3 et 4 sont divisées d'abord en dix parties donnant donc les dixièmes d'unité (*fig. 9*). On lira donc 2,1, 2,2, etc., 3,1, 3,2 à chacun des

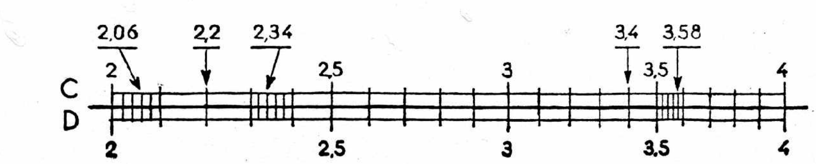

FIG. 9.

grands traits qui ne comportent pas de chiffres. Chaque dixième est subdivisé en 5 espaces, chacun d'eux vaut donc 2 centièmes. on peut donc lire au troisième petit trait à droite de 2, le chiffre 2,06, de même : 2,34, 3,58, etc...

On peut estimer à l'oeil la moitié de chacune de ces petites divisions, ainsi on pourra par exemple lire 2,25, en plaçant le trait du curseur entre la division 2,24 et 2,26, et juste en son milieu.

A partir du chiffre 4, chaque intervalle 4-5 ... 9-10 est divisé en dix parties donnant le dixième de l'unité (fig. 10) soit: 4,3 - 7,8 - 9,5, etc.

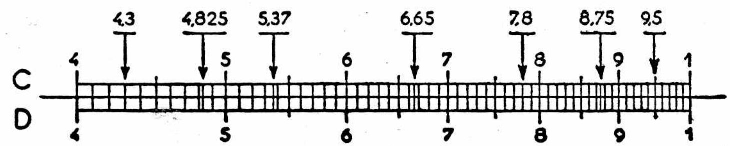

FIG. 10.

Ensuite chaque dixième est simplement divisé en deux; chaque intervalle entre traits vaut donc 5 centièmes. On peut donc lire exactement les nombres tels que : 4,25 ; 6,65 ; 8,75, etc. Par estimation à l'oeil de la moitié de chaque intervalle on peut lire des nombres tels que 4,825 situé au milieu des divisions 4,80 et 4,85 ; de même 6,375 situé entre 6,35 et 6,40. Pour les autres nombres il faut estimer l'espace entre deux divisions et le partager visuellement autant qu'on peut le faire. Par exemple, pour lire le nombre 5,37, il faut placer le trait du curseur à droite de la division 5,35 et à 2/5 de l'espace qui la sépare de la suivante 5,40. Ceci est une question d'habitude; avec un peu d'entraînement on place correctement le curseur avec une erreur inférieure à 1/100.

Résumé. - Sur les échelles des nombres CD graduées de 1 à 10 on peut donc lire n'importe quel nombre à 1/100 près: ceci signifie qu'on peut lire trois chiffres significatifs directement entre 1 et 2 ; avec estimation de 1 / 2 intervalle entre 2 et 4 ; et par interpolation à l'oeil avec une erreur possible de 1/100, de 4 à 10.

Exercices

Chercher la lecture des nombres :
1,09 - 1,36 - 1,775 - 2,24 - 3,47 - 4,55 -7,325
8,775 - 9,60.

2° Échelle des inverses., CI (RIETZ).

Cette échelle est la même que celle des nombres, mais en sens inverse ; il faut donc la lire *de droite à gauche* avec les mêmes observations que pour les échelles CD (*fig. 11*).

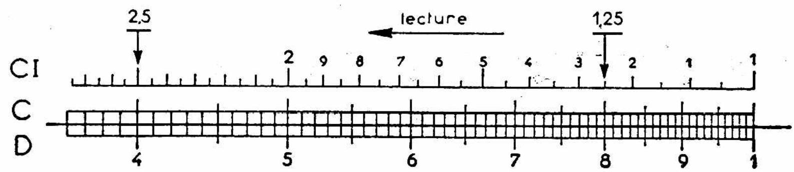

FIG. 11.

Par exemple, en alignement avec le nombre 4 de CD on trouve 2,5 sur CI (et non pas 3,5); avec 8 sur CD 1,25 sur CI (et non 1,35).

3° Échelle des carrés, AB (MANNHEIM ou RIETZ).

L'échelle des carrés est en réalité double (*fig. 12*) ; sur chaque

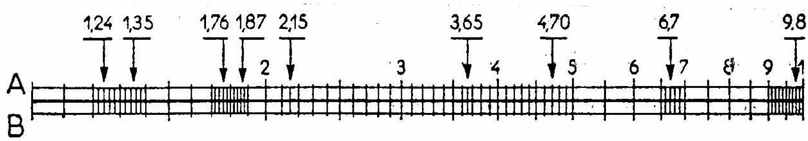

FIG. 12.

fraction on voit que de 1 à 2 les divisions sont de, 2 centièmes. On peut lire directement 1,24 - 1,76, etc........et par estimation

1,35 - 1,87; de 2 à 5 chaque petite division vaut 5 centièmes. On lira donc directement 2,15 - 3,65 - 4,70. Enfin de 5 à 10 on -ne trouve que . des divisions valant le dixième.

On lira directement 6,7 - 9,8, etc.. Pour tous les autres nombres, soient: 2,37 - 8,43, etc.., il faudra faire une interpolation entre deux divisions successives.

4° Échelle des cubes, K (Rietz).

Sur chacune des trois sections identiques graduées de 1 à 10 (le zéro n'est pas toujours gravé) on remarquera de suite que l'on a (*fig. 13*)

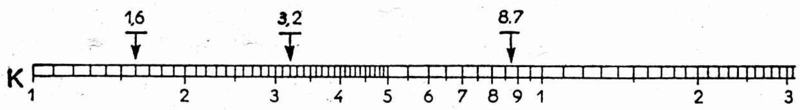

Fig. 13.

►de 1 à 2, subdivision en 2 centièmes;
►de 2 à 5, subdivision en 5 centièmes;
►de 5 à 10, subdivision en 1 dixième.

5° Echelle des logarithmes, L.

(Rietz, au-dessus - Mannheim, au-dessous de la réglette).

Cette échelle, ayant ses divisions régulièrement espacées, comporte les mêmes subdivisions d'un bout à l'autre (*fig.14*).

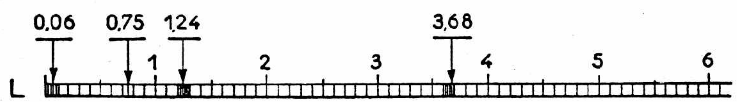

Fig. 14.

Elle est d'abord divisée de 0 à 10 avec chiffre marqué sur la règle puis subdivisée en dix parties, elles-mêmes comprenant 5 espaces égaux, donc valant 2 centièmes. On pourra donc lire tout nombre de trois chiffres, pair, directement et tout nombre impair par estimation d'un demi-intervalle.

Remarquons que pour cette échelle nous lirons les trois chiffres sans virgule, car ils représentent la mantisse seule du logarithme du nombre. Nous verrons plus tard l'emploi détaillé de cette échelle.

Exercices

Lecture des nombres :

006 - 075 - 124 - 368 - 587 - 960.

Nous conseillons au lecteur de bien se familiariser avec sa règle, en y effectuant de nombreuses lectures sur les diverses. échelles avant de passer aux chapitres suivants, pour lesquels, dans les exemples donnés, on fait appel à des nombres quelconques qu'il faudra savoir trouver sans hésitation.

Nous ne parlons pas maintenant de la lecture des échelles des lignes trigonométriques, car nous jugeons qu'il est plus simple de l'incorporer avec le chapitre concernant leur emploi.

PREMIÈRE PARTIE

LA RÈGLE DE RIETZ

CHAPITRE 1

LA MULTIPLICATION OPÉRATION FONDAMENTALE (Échelles des nombres).

Principe opératoire.

La règle à calcul, rappelons-le, permet la multiplication de deux nombres compris entre 1 et 10 ; et, à condition que le produit soit lui-même inférieur à 10, il peut être lu *directement*. Voyons comment:

Soit à effectuer le produit *P* = 1,5 x 3,5. Tirons la réglette vers la droite de manière à amener le 1 de l'échelle **C** des nombres sur la division 1,5 de l'échelle **D** de la règle (*fig. 15*).

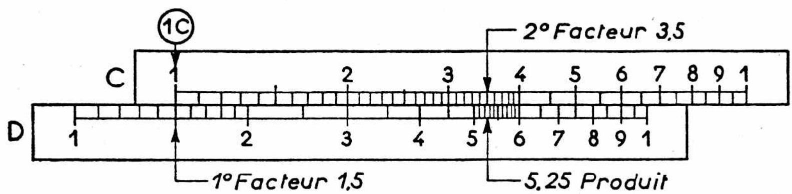

FIG. 15.

Plaçons alors le trait central du curseur sur la division 3,5 de l'échelle **C** de la réglette. Nous trouvons le produit *P* = 5,25 sous le trait du curseur en lisant cette valeur sur l'échelle **D**. On remarquera que le déplacement de la réglette a bien réalisé l'addition de deux longueurs, chacune proportionnelle au logarithme de l'un des facteurs.

Notations abrégées. - Pour simplifier les écritures, nous désignerons dorénavant par :

►-**C** et **D**, chacune des échelles des nombres de la réglette et de la règle ;

►-le terme général d'**index**, les valeurs extrêmes de l'échelle des nombres, soit 1 et 10 ;

►-**1C**, **1D** et **10C**, **10D**, chacun de ces index (d'après leur valeurs)

►-**Tc**, le trait central du curseur utilisé pour la correspondance d'une échelle à l'autre.

Nous pouvons dès lors formuler une première loi pratique, source de toutes les autres, savoir :

1er Cas. - Produit (inférieur à 10) de deux nombres.

Pour trouver le produit de deux facteurs, placer **1C** en face du premier facteur lu sur **D**. Lire le produit sur **D** en face du deuxième facteur placé sur **D**. Se servir du **Tc** pour faciliter la lecture.

Exemples:

1,76 x 2,80 = 4,93 2,83 x 3,06 = 8,63.

Précision de la règle. - Lorsque le **Tc** ne tombe pas exactement pour la lecture du produit sur une division gravée de la règle, on est obligé de faire une interpolation à l'oeil, c'est le cas, par exemple pour la valeur 8,63. Ce faisant, on peut craindre une erreur de l'estimation qui ferait que la vraie valeur serait peut être 8,62 ou 8,64. Cette erreur peut provenir également d'un alignement imparfait entre l'index et le premier facteur. On peut dire quen prenant les meilleures précautions à la pose de la réglette et à la lecture du résultat, l'erreur maximale doit être inférieure à ± 0,005.

Cette précision dans les calculs, effectués sur la règle de 25 cm de longueur, découle évidemment de cette longueur d'échelle et des divisions qu'on a pu y faire figurer. Elle est comparable à celle que l'on obtient avec une table de logarithmes à trois décimales. Toutefois le calcul à la règle est beaucoup plus rapide qu'avec une telle table.

Nous indiquerons plus tard comment on peut augmenter cette précision par des artifices simples, lorsque parfois le calcul l'exige (*Chap. 14*).

2e Cas. - Produit supérieur à 10.

Essayons maintenant d'appliquer la loi précédente au produit *P* = 3,25 x 7,2. En amenant **1C** en face du facteur 3,25 sur **D**, nous constatons que le deuxième facteur 7,2 sur **C** est en dehors de la règle à droite, ce qui rend impossible la lecture de P (*fig.16*).

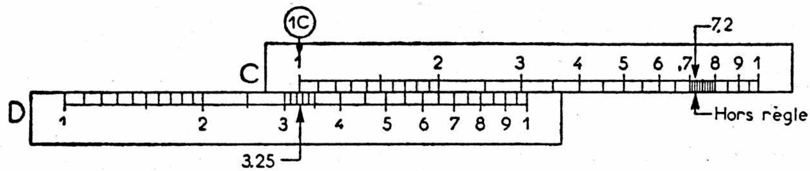

FIG. 16.

Pour tourner cette impossibilité, déplaçons la réglette de toute la longueur de l'échelle **C** de manière à placer **10C** sur 3,25. Dans cette position de la réglette l'index **1C** est hors règle à gauche (*fig. 17*). Si l'on suppose que l'échelle **D** se prolonge à gauche de **1D** par des graduations identiques à celles de **D**, cette échelle représenterait des nombres inférieurs à 1, on peut alors voir que **1C** serait sur la division 3,25 de cette échelle, qui en réalité devrait être lue 0,325. Ceci dit, en face de 7,2 de **C**, on trouve la valeur 2,34 sur **D**. Celle-ci représente donc :

P = 0,325 x 7,2. Pour obtenir finalement le produit cherché, il suffit de multiplier par 10 cette valeur d'où *P* = 23,4.

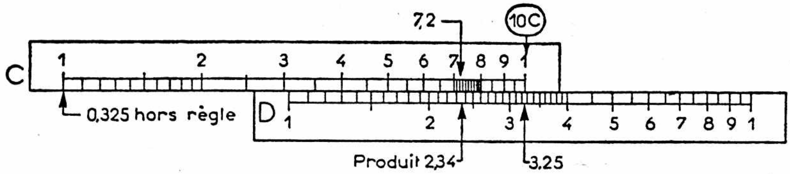

FIG. 17.

Nous constatons donc, que pour trouver ce produit supérieur à 10, nous avons dû user d'un artifice : d'abord diviser l'un des facteurs par 10 (réglette décalée) puis multiplier le résultat lu par 10.

Autres exemples :

4,25 x 2,8 = 1,19 x 10 = 11, 9
6,24 x 3,5 = 2,17 x 10 = 21,7

La loi pratique de ce deuxième cas est :

Si le produit de deux nombres est effectué à l'aide de 10C (au lieu de 1C) le résultat lu est à multiplier par 10.

Coefficient de manipulation. - Nous allons donner à cette multiplication par 10 de la lecture, une forme plus condensée, en remplaçant ce coefficient 10 par son logarithme qui est 1. Ce dernier sera dénommé « coefficient de manipulation » du fait qu'il découle de celle-ci, par l'emploi de 10C. Et nous dirons maintenant :

Si le produit de deux nombres est effectué à l'aide de 10C, il faut tenir compte du coefficient de manipulation (en abrégé Mp) de + 1, ce qui sous-entend le produit par $10^1 = 10$ du résultat.

On comprendra toute l'importance de cette convention dans les paragraphes suivants.

Remarquons de suite que l'on peut aussi dire que le produit effectué avec 1C est affecté du Mp = 0 puisque $10^0 = 1$ et que 0 est le logarithme de 1. En final, on a donc Mp = 0, lecture directe du produit Mp = + 1, lecture x 10 (emploi de 10C).

3e Cas. Produit de deux nombres quelconques.

La règle nous permet jusqu'ici d'effectuer le produit de deux facteurs inférieurs à 10. Voyons comment nous allons pouvoir ramener à ce cas celui de deux facteurs quelconques.

Soit à calculer *P* = 1,8 x 27. Nous pouvons écrire *P* = 1,8 x 2,7 x 10; nous savons calculer 1,8 x 2,7 = 4,86, d'où évidemment *P* = 4,86 x 10 = 48,6.

Soit encore *P* = 1,4 x 525 = 1,4 x 5,25 x 100, nous obtenons facilement *P* = 7,35 x 100 = 735.

Coefficient d'opération. - Nous constatons à nouveau l'emploi d'un artifice analogue au précédent, savoir : la division du facteur supérieur à 10, par 10 ou 100 et le produit du résultat lu par ces mêmes valeurs. Ici encore, nous allons remplacer les facteurs 10 et 100 par leurs logarithmes 1 et 2 auxquels nous donnerons le nom de « coefficient d'opération ». Nous remarquons d'ailleurs que ce dernier n'est autre que la caractéristique du logarithme du facteur en cause, soit 1 pour 27 et 2 pour 525, c'est pourquoi nous le désignerons en abrégé par: Ct. Nous pouvons maintenant formuler la loi pratique :

Si l'un des facteurs est supérieur à 10, on le ramène à être compris entre 1 et 10, en le divisant par 10^n et on note Ct = *n*. Le résultat est à multiplier par ce même facteur 10^n (en pratique, décalage de la virgule à droite de *n* rangs). On peut pressentir que cette loi est susceptible d'une généralisation immédiate comme les exemples suivants vont nous le démontrer.

1er exemple. - Deux facteurs supérieurs à 10.

Soit *P* = 49 x 145 = 4,9 x 10 x 1,45 x 10^2 = 4,9 x 1,45 x 10^3.

D'où *P* = 7,1 X 10^3 = 7 100. On voit que les Ct 1 de 49 et 2 de 145 se sont ajoutés pour donner 3, c'est-à-dire la puissance de 10 par laquelle est multiplié le résultat lu. En fait rien que de plus normal, puisque les Ct sont des caractéristiques.

2e Exemple. - Un facteur > 10, l'autre < 1.
Soit *P* = 0,025 X 37. Pour le premier facteur le Ct est négatif : Ct = - 2. Pour le deuxième Ct = + 1, c'est donc ici la somme algébrique qu'il faut faire et Ct = - 1 pour la lecture, d'où *P* = 0,925.

Dans tous les exemples précédents, les nombres choisis à dessein, donnaient un produit à lecture directe sur la règle. Que va-t-il arriver si maintenant le produit des nombres réduits est supérieur à 10 ? Tout simplement que nous serons obligés de l'effectuer avec 10C et de tenir compte du Mp + 1. Mais par la définition même du coefficient de manipulation (logarithme de 10), on comprend de suite qu'il suffira de l'ajouter au Ct somme des facteurs pour obtenir le Ct total applicable à la lecture.

Exemples :

66 x 364 = 24 000, en effet, nous avons :
Ct = + 1 + 2 = + 3, Mp = + 1, total + 4
485 x 0,27 = 131, Ct = + 2 - 1 = + 1, Mp + 1, total + 2
0,082 x 0,555 = 0,045 5, Ct = - 2 - 1 = - 3, Mp + 1, total -2

Exercice n° 1

a) 0,735 x 28 b) 0,072 5 X 0,193 c) 3 740 x 0,021
d) 284 x 0,034 5 e) 435 x 6 300 f) 1365 x 0,515

Les solutions des exercices présents et futurs sont à la fin de l'ouvrage et sont données d'après les lettres de référence.

4e Cas. - Produit de *n* nombres quelconques.

La méthode exposée ci-dessus en détail pour le produit

de deux facteurs se généralise immédiatement au cas d'un produit de la forme :
$P = a \times b \times c \times d \times \ldots$ avec des nombres quelconques.

Pour trouver le Ct de *P*, il suffira en effet de faire la somme algébrique des Ct de tous les facteurs, à laquelle on ajoutera tous les Mp (+ 1) qui apparaîtront au cours de la manipulation de la règle, d'où la loi suivante

Loi générale du produit.

Réduire tous les facteurs entre 1 et 10 en notant les Ct ,nécessaires pour ce faire (Caractéristiques des logarithmes).

Faire les produits successifs à la règle en notant Mp + 1 chaque fois que 10 C est utilisé. Multiplier le résultat final lu par la puissance de 10 égale à la somme globale Ct + Mp (pratiquement décalage de la virgule à gauche ou à droite).

Disposition pratique du calcul. - Nous conseillons au lecteur d'adopter dès maintenant une disposition particulière de son calcul, indiquée ci-après, qui lui facilitera un contrôle ultérieur, soit par lui-même, soit par une, tierce personne, avec la possibilité de localiser toute erreur faite sur les coefficients.

L'expression algébrique du calcul étant posée, inscrire à gauche d'une barre verticale tous les Ct des facteurs. Chaque fois qu'un Mp + 1 interviendra au cours de la manipulation de la règle, l'inscrire à droite de la barre de haut en bas. Le calcul terminé, faire la somme des deux colonnes Ct et Mp, puis le total de la ligne.

Nous illustrerons l'application de la loi générale et de cette .disposition par l'*exemple* suivant :

Soit $P = 1875 \times 0{,}37 \times 0{,}076\,5 \times 84$.

Les Ct à inscrire à gauche de la barre verticale sont dans l'ordre de haut en bas + 3 - 1 - 2 + 1, dont la somme peut être faite de suite, soit + 1.

Ct	Mp
+3	+1
-1	+1
-2	
+1	
+1	+2 = +3

Prenons la règle et tirons la réglette à droite pour placer 1C sur 1,875 de D, puis amenons le Tc sur 3,7 de C. Le produit est en lecture directe (Mp 0) et + 1 comme il est sans intérêt, nous ne lisons même pas. Ensuite nous ramenons 10C sous le Tc (donc sur le premier produit partiel). Nous déplaçons alors le Tc jusqu'à ce qu'il soit sur 7,65 de C et nous notons Mp + 1 au tableau des coefficients ci-contre.

Nous sommes encore obligés d'amener 10C sous le Tc puis de reporter celui-ci sur 8,4 de C en notant à nouveau Mp + 1.

Le résultat est maintenant sur D et sous le Tc, soit en lecture 4,46. La sommation des coefficients du tableau est + 3, d'où finalement *P* = 4 460 (virgule décalée de 3 rangs sur la droite).

►*Remarque 1.* - Si nous avons tenu à noter par le détail toutes les phases des manipulations nécessaires pour aboutir au produit cherché, c'est afin d'en faire bien saisir le processus manuel et aussi les raisons qui nous l'imposent. En particulier lorsque nous amenons 10 C sous le Tc et non 1C, c'est tout simplement qu'avec ce dernier le produit partiel tomberait hors règle. Il est possible et normal que le débutant fasse quelques manoeuvres inutiles avant d'avoir trouvé la bonne, mais avec l'habitude tout deviendra vite automatique.

►*Remarque 2.* - Pour qu'il comprenne encore mieux l'esprit du calcul précédent et le jeu des coefficients, il est recommandé au lecteur de le refaire, tableau compris, en changeant l'ordre des facteurs.

Soit par exemple P = 84 x 0,37 x 1,875 x 0,076 5. Il constatera principalement que les Mp apparaîtront lors de la manoeuvre de la règle, dans un ordre différent, mais que leur somme reste inchangée.

Enfin, nous conseillons au lecteur d'assimiler complètement ce chapitre, en s'entrainant non seulement, avec les exercices ci-après, mais avec de nombreux autres, car il est la clé de voûte de toute cette méthode. Ce n'est qu'après avoir acquis une bonne sûreté dans ses calculs qu'il pourra poursuivre son étude, rendue par cela même plus facile.

Exercice n^o 2

a) 0,056 x 2 940 x 14,5 x 3,56
b) 16,3 x 0.004 x 0,23 x 610
c) 7,3 x 120 x 10^3 x 45 x 0.003 5
d) 66 x 0,37 x 920 x 5,85 x 0,045

CHAPITRE 2

LA DIVISION
OPÉRATION RÉCIPROQUE
(Échelles des nombres)

La division est une opération réciproque (ou inverse) de la multiplication; il est donc naturel de penser qu'on va retrouver dans sa théorie, les mêmes principes et les mêmes coefficients, mais changés de sens ou de signe.

1er Cas. - Quotient supérieur à 1.

Lemme. La règle permet d'effectuer directement le quotient de deux nombres compris entre 1 et 10, sous condition qu'il soit lui-même entre 1 et 10.

Cette proposition est le lemme réciproque de celui de la multiplication. Nous serons donc également obligés de ramener tous les autres cas à celui-là, que nous allons examiner de suite.

Sur notre règle, posons la multiplication 1,5 x 4,5 = 6,75 (*fig. 18*). Soit avec **1C** au-dessus de 1,5 de **D** et le **Tc** à la fois

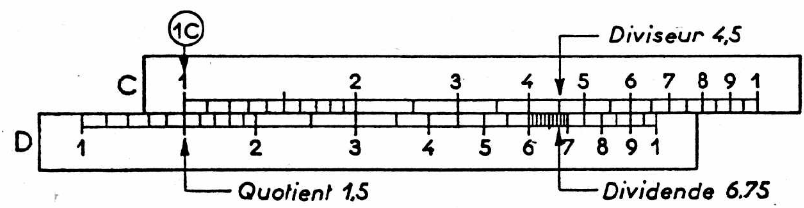

FIG. 18.

sur 4,5 de **C** et sur 6,75 de **D**. La règle ainsi disposée pour le calcul de ce produit, peut en même temps donner la solution du quotient $\frac{6,75}{4,5} = 1,5$ ce dernier étant la même opération prise à l'envers ou à reculons.

D'où la règle pratique immédiate :

Placer le diviseur lu sur **C**, au-dessus du dividende lu sur **D** avec l'aide du **Tc**.

Lire le quotient sur **D** en face de **1C**.

Exemples : $\frac{7,7}{2,6} = 2,96$; $\frac{5,45}{3,46} = 1,575$

2e cas. - Quotient Inférieur à 1.

Appliquons la règle énoncée ci-dessus au quotient $Q = \frac{1,75}{2,26}$, nous voyons de suite que 1C est hors règle vers la gauche (*fig. 19*). Le quotient ne peut-être lu directement

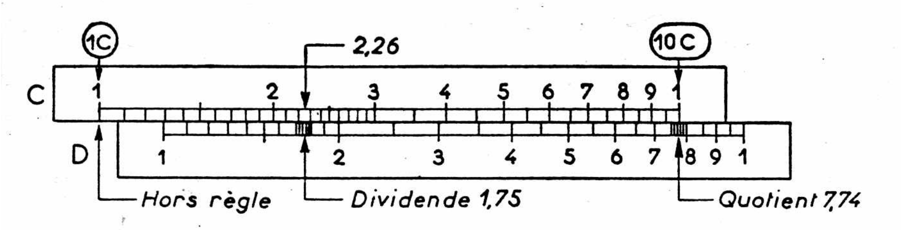

FIG. 19.

mais nous pouvons en le multipliant par 10 lire la valeur 7,74 en face de 10C Pour obtenir le quotient cherché, il faut donc diviser cette valeur lue par 10, ce qui donne 0,774.

Par analogie avec ce que nous avons vu pour le produit, nous dirons que la lecture est affectée dans ce cas du coefficient de manipulation Mp = - 1, ce qui sous-entend que la lecture est à multiplier par 10^{-1}, où à diviser par 10, les deux expressions étant équivalentes.

Les deux cas examinés se résument alors comme suit :

► *Loi du quotient*.- Placer le diviseur lu sur **C**, au-dessus du dividende lu sur **D**. Le quotient sera lu : soit directement (**Mp** 0) sous **1C**, soit avec **Mp - 1**, sous **10C** (lecture à diviser par 10).

►*Remarque.* - Le lecteur a certainement déjà remarqué que le Mp pour la division découle de l'emploi de 10C, et qu'il en était de même pour celui de la multiplication. La seule différence réside dans les signes de ce Mp : positif pour le produit et négatif pour le quotient, et ceci s'explique naturellement par la réciprocité des deux opérations.

Cette remarque est importante, car elle nous permet de formuler une règle mnémonique très simple qui aidera désormais le lecteur à se souvenir de la condition qui entraîne l'application des Mp.

►*Règle mnémonique.* - Lorsque l'index 10C entre en jeu pour le calcul du produit ou du quotient, il faut tenir compte du Mp + 1 ou - 1 (lecture multipliée ou divisée par 10).

3^{e} Cas. - Quotient de nombres quelconques.

Si le quotient comporte deux nombres quelconques, nous le ramènerons aux cas précédents en utilisant un procédé analogue à celui employé pour le produit, donc ici encore, nous ferons appel aux Ct des nombres donnés.

1er exemple :

$$Q = \frac{465}{2,5} = \frac{4,65}{2,5} \times 10^{2} = 1,86 \times 100 = 186$$

Le résultat est obtenu en multipliant la lecture par 10^{2} car le Ct du numérateur est 2. Analogie directe avec le produit.

2^{e} exemple :

$$Q = \frac{0,335}{5,14} = \frac{3,35}{5,14} \times 10^{-1} = 6,525 \times 10^{-2} = 0,065\ 25$$

Cette fois-ci, le Ct du numérateur est - 1, mais le résultat est lu avec 1OC, d'où Mp - 1, c'est donc bien par 10^{-2}, qu'il faut multiplier, puisque la somme Ct + Mp = - 2.

3e exemple :

$$Q = \frac{5,75}{17} = \frac{5,75}{1,7} \times 10^{-1} = 3,38 \times 10^{-1} = 0,338$$

Maintenant c'est le dénominateur qui est supérieur à 10.

Il a pour Ct + 1, mais $\frac{1}{10} = 10^{-1}$. Il faut donc changer de signe le Ct du dénominateur, pour l'appliquer à la lecture du quotient.

4e exemple :

$$Q = \frac{1,80}{0,24} \qquad Q = 7,5$$

En effet, le Ct changé de signe du dénominateur est + 1 ; mais le calcul est fait avec 10C, d'où Mp - 1. Au total on a 0, c'est-à-dire lecture directe.

5e exemple : cas général

Soit $Q = \frac{21,6}{0,34}$ lecture 6,35 avec Ct + 1 et + 1, puis Mp - 1, au total + 1, d'où Q = 63,5.

Ce dernier exemple nous permet de conclure par:

Loi générale du quotient. - Réduire entre 1 et 10 le numérateur et noter le Ct nécessaire. Réduire de même le dénominateur et noter le Ct *en changeant* son signe. Effectuer le quotient des nombres réduits et multiplier la lecture par la puissance de 10 égale à la somme des Ct, à laquelle on ajoutera Mp - 1 si la lecture est faite avec 10C (pratiquement décalage de la virgule).

On dressera le tableau des coefficients comme pour le produit.

On reconnaît que ce texte est identique à celui du produit, mais avec changement de signe pour le Ct du dénominateur et pour le Mp.

Exemples :

$Q = \dfrac{475}{13,5}$ lecture 3,5 $\quad Q = 3,52 \times 10 = 35,2$

+2	0
- 1	
+1	0 = +1

$Q = \dfrac{16,65}{3700}$ lecture 4,5 $\quad Q = 4,5 \times 10^{-3} = 0,0045$

+1	-1
- 3	
- 2	-1 = -3

Exercice n° 3

$a)\dfrac{685}{38,4}$ $\quad b)\dfrac{43,2}{7,4}$ $\quad c)\dfrac{274}{0,85}$ $\quad d)\dfrac{0,018}{0,25}$

$e)\dfrac{35,6}{1575}$ $\quad f)\dfrac{10^8}{4750}$ $\quad g)\dfrac{0,75}{137}$ $\quad h)\dfrac{465}{\pi}$ $\quad i)\dfrac{3,5}{67}$

CHAPITRE 3

COMBINAISON DE MULTIPLICATIONS ET DE DIVISIONS

1° Calcul général.

Maintenant que nous savons effectuer les multiplications et divisions quelconques, nous pouvons aborder les calculs complexes très courants, de la forme générale

$$P = \frac{a \times b \times c \times d \times ....}{x \times y \times z \times .....}$$

Nous les résoudrons très simplement par des produits et quotients successifs de nombres toujours réduits entre 1 et 10. Les résultats partiels sans intérêt, ne seront pas lus, mais fixés par le Tc pour la poursuite du calcul.

Les lois du produit et du quotient, s'appuyant sur les mêmes principes vont se combiner très naturellement. C'est ainsi que tous les Ct des divers facteurs vont s'additionner algébriquement, ceux relatifs au dénominateur étant au préalable changés de signe. A cette première somme, nous ajouterons les Mp, tant positifs que négatifs qui apparaîtront au cours du maniement de la règle (emploi de 10C) pour aboutir à un total général n. Le résultat final lu sur la règle et compris entre 1 et 10 sera multiplié par 10^n ce qui correspond pratiquement à décaler la virgule de n rangs à droite (n positif) ou à gauche, (n négatif).

On peut maintenant juger que cette méthode des coefficients est simple dans son application. Elle nécessite d'abord la détermination des Ct, qui ne sont autres que des caractéristiques de logarithmes, donc aucune difficulté spéciale. Ensuite, la constitution du petit tableau, où l'on porte à gauche les Ct, à droite les Mp, permet d'éviter les erreurs que pourrait donner un calcul mental dans la sommation. De plus, elle autorise le contrôle, par soi-même ou par un tiers, des opérations effectuées, et on admettra facilement qu'après avoir couvert de calculs une page entière, une vérification des résultats est toujours souhaitable. Celle-ci sera donc entreprise surtout par le débutant, car elle a autant d'importance que la classique preuve par 9 de l'arithmétique.

Ceci dit, nous allons illustrer l'application générale de la méthode par l'exemple suivant que nous allons analyser en détail afin d'en rendre l'assimilation plus facile pour le lecteur.

Soit à calculer $P = \dfrac{2{,}540 \times 38 \times 0{,}047 \times 0{,}54}{0{,}75 \times 16{,}5 \times 13 \times 6{,}5}$

+3	- 1
+1	+1
- 2	- 1
- 1	+1
+1	+1
- 1	- 1
- 1	
0	0 = 0

Commençons par dresser le tableau des coefficients dans lequel nous pouvons inscrire les Ct du numérateur qui sont dans l'ordre + 3 + 1 - 2 -1, ceux du dénominateur sont : -1 + 1 + 1 et 0. Nous les porterons au tableau en les changeant de signe, soit + 1 - 1 - 1. On peut sans attendre en faire la somme qui est 0, que l'on inscrit en bas de la colonne des Ct. Nous allons maintenant prendre la règle en mains et y effectuer successivement les opérations des nombres réduits dans un ordre quelconque. Nous choisissons arbitrairement de débuter par le premier quotient, puis d'alterner produit et quotient. Nous posons donc sur D et C, le quotient 2,54 : 7,5. Le résultat se trouve sous 10C, ce qui conduit à noter au tableau Mp - 1. Pour effectuer maintenant le produit x 3,8, nous voyons qu'il suffit d'amener le Tc sur cette valeur de C sans qu'il soit nécessaire de déplacer la réglette. Mais nous notons Mp + 1, puisque le produit est obtenu avec 10C.

Pour passer au quotient suivant : 1,65, nous devons tirer la réglette pour amener cette valeur de C sous le Tc. Le résultat est encore sous 10C, donc à noter -1.

Le produit x 4,7 est obtenu par le simple déplacement du Tc jusqu'à ce facteur sur C et nous avons encore Mp + 1.

Ensuite, quotient : 1,3 en amenant ce chiffre de C sous le Tc et lecture directe du résultat sous 1C, d'où Mp 0. Pour réaliser le produit x 5,4, nous sommes obligés de fixer le résultat précédent par le Tc, puis de décaler la réglette de toute son échelle afin de placer 10C sous le Tc. Celui-ci peut alors être amené sur 5,4 de C sans oublier de noter Mp + 1.

Enfin il nous reste le quotient : 6,5 obtenu en ramenant ce chiffre sous le Tc. Nous notons à nouveau Mp - 1, et pouvons maintenant faire la lecture du résultat cherché sous 10C qui donne : 2,34.

La sommation de tous les Mp inscrits est 0. donc au total le tableau indique Ct + Mp = 0. On peut en conclure que P = 2,34 est la vraie valeur du calcul posé.

►*Remarque 1.* - Lorsqu'un résultat partiel est lu directement,, donc avec Mp 0, on peut négliger de noter ce 0 au tableau. Cependant, nous conseillons au débutant de l'y inscrire. En effet, cela permet en final de vérifier qu'on a bien autant de Mp que d'opérations partielles et ce peut être la preuve qu'on n'a omis de compter aucun Mp.

►*Remarque 2.* - Nous conseillons encore ici, de reprendre le calcul précédent en modifiant l'ordre des opérations successives : par exemple en effectuant tous les produits du numérateur, puis tous les quotients indiqués par le dénominateur. On observera, comme déjà vu, que les Mp sont amenés d'une manière différente mais que leur somme est toujours nulle.

Pour terminer, le lecteur pourra vérifier qu'en effectuant les opérations dans l'ordre qui suit:

2,54 : 1,3 x 4,7 : 7,5 x 5,4 : 6,5 x 3,8 : 1,65

tous les résultats partiels sont obtenus en lecture directe et que, par conséquence, les diverses manipulations de la réglette sont réduites au minimum.

Autres exemples :

$$P^1 = \frac{0{,}0085 \times 12{,}5 \times 456}{0{,}27 \times 3{,}7 \times 0{,}076} \qquad P^1 = 6{,}38 \times 10^{2} = 638$$

- 3	
+1	
+2	
+1	
+2	
+3	-1 = +2

$$P^2 = \frac{245 \times 0{,}0175 \times 472}{0{,}52 \times 74200} \qquad P^2 = 5{,}24 \times 10^{-2}$$

+2	
- 2	
+2	
- 1	
- 4	
- 1	-1 = - 2

Dans les tableaux de ces exemples, nous n'avons inscrit que la somme des Mp, puisque ceux-ci dépendent de l'ordre dans lequel le lecteur effectuera les opérations et que nous lui en laissons le choix.

Exercice n°4

$$a)\ \frac{47 \times 0{,}72 \times 125 \times 51}{2{,}65 \times 183} \qquad b)\ \frac{84 \times 0{,}027 \times 448}{5300 \times 0{,}38 \times 7{,}8} \qquad c)\ \frac{0{,}54 \times 175 \times 10^{5}}{246 \times 39 \times 4{,}2}$$

2° Calculs particuliers.

Le calcul d'une quatrième proportionnelle, appelée aussi règle de trois se résout par la formule : $y = \frac{a}{b} x$ c'est donc un cas particulier simplifié de la formule générale traitée précédemment. Cependant il mérite une mention spéciale, car il correspond à quantité de problèmes usuels.

Problème 1. - *Réduction d'un dessin dans une proportion donnée.*

Soit à réduire toutes les cotes d'un dessin dans le rapport 2/3 ; si *x* est la cote du dessin, la nouvelle cote sera : $y = \frac{2}{3} x$

Lorsque *x* varie , le facteur 2/3 est constant. Ceci nous permet de disposer la règle de manière à obtenir une correspondance directe entre les *x* et les *y* sans autre manipulation (*fig. 20*).

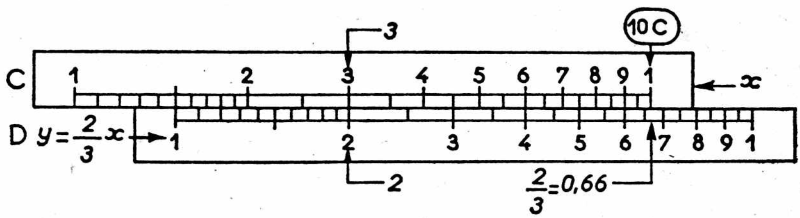

FIG. 20.

Plaçons. la réglette pour réaliser le quotient 2/3 , soit 0,666 qui apparait sous 10C. Nous constatons qu'en vis-à-vis de toute valeur de *x* lue sur C se trouve la valeur $y = \frac{2}{3} x$ sur D , ce qui nous permet de trouver finalement :

x = 18	2,4	290	39	5,1	825,	etc.
y = 12	1,6	193,4	26	3,4	550	etc.

Pour les valeurs de *x* comprises entre 1 et 1,5 la lecture de *y* tombe hors règle. Pour la retrouver, il suffit de décaler la réglette en amenant 1,5 sur 10D.

Problème 2. - *Conversion des degrés en grades et vice-versa.*

Le cercle est divisé en 360 degrés ou en 400 grades.

Nous avons donc $y\,gr = \frac{400}{360} x^0 = \frac{10}{9} x^0$

Réalisons le quotient 10/9 en plaçant 9 de C au-dessus de 10D et nous pouvons lire sur D la valeur en grades des angles. de 10 à 90 degrés en lisant ceux-ci sur C (*fig. 21*)

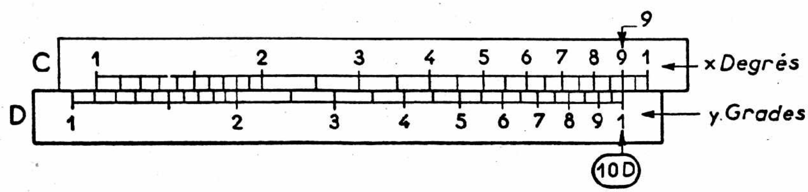

FIG. 21.

Exemples:

Degrés : 3	7	14	27	47,	etc.
Grades : 3,33	7,77	15,55	30	52,2,	etc.

Dans cette position, on trouvera également la correspondance pour les angles de 100 à 360 degrés, mais pour ceux de 9 à 10 ou de 90 à 100.1 il est nécessaire de reporter 9 de C sur 1D, sauf si la règle possède après 10D, une extension d'échelle jusqu'à la valeur 1,13 (Règle de RIETZ moderne).

Problème 3. - *Conversion de minutes en centièmes.*

Les temps de fabrication dans l'industrie sont comptés depuis longtemps en heures décimales, c'est-à-dire que l'heure est divisée en 100 parties au lieu de 60 minutes. Cela facilite considérablement les calculs, car il est plus aisé d'additionner 1,75 h + 1,40 h = 3,15 h, plutôt que 1 h 45 mn + 1 h 24, mn soit 3 h 09 mn et d'autre part le prix de revient s'obtient plus directement par le simple produit des heures par le taux de salaire, soit 3,15 h x 3,60 = 11,34 F. C'est pourquoi on trouve des chronomètres donnant directement les minutes centésimales. Mais à défaut de cet instrument, on peut relever les temps sur une montre courante et faire la conversion après. Celle-ci sera obtenue par la règle en plaçant le 6 de C au-dessus de 10C. Dans le premier cas (fig. 22), on lira les minutes sur C et

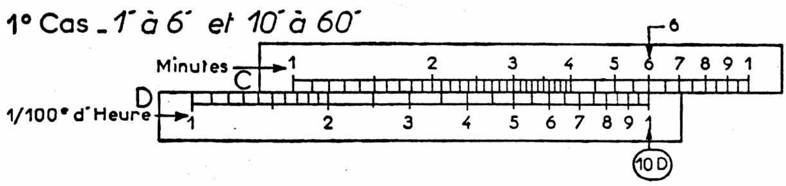

Fig. 22.

les centièmes sur D. Pour les valeurs de 6 à 10 minutes, le 6 de C sera reporté sur 1D, c'est le deuxième cas (*fig. 23*).

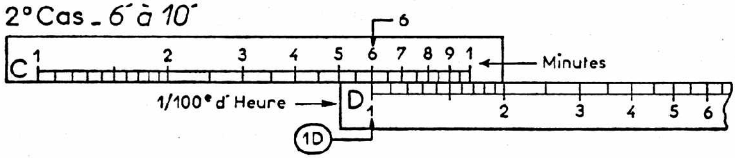

Fig. 23.

Signalons que par la même disposition, on obtient aussi la conversion des minutes d'angles (degrés) en minutes centésimales.

On peut dire après ces exemples, que pour bien d'autres problèmes analogues, la règle se transforme rapidement en une table de correspondance à trois chiffres, très commode pour la conversion de toutes sortes d'unités courantes : longueurs, poids, etc... et même monétaires ; il suffit de connaître le rapport $\frac{a}{b}$.

CHAPITRE 4

EMPLOI DE L'ÉCHELLE DES INVERSES

Jusqu'ici toutes les opérations, produits et quotients ont été effectuées sur les échelles des nombres C et D parce que ce sont celles qui donnent la plus grande précision de lecture, conséquence de leur longueur couvrant toute la règle. Cependant l'échelle des inverses (ou réciproques) ayant la même longueur et les mêmes graduations que les précédentes peut être considérée comme leur complément logique. Elle n'existe toutefois que depuis l'apparition des règles système RIETZ et se trouve sur toutes les règles actuelles. Voyons donc les avantages précieux que peut nous apporter l'emploi de cette échelle (symbole repère : CI).

1. Calcul direct de l'inverse d'un nombre.

L'échelle des inverses **CI** est située sur la réglette de la règle RIETZ, ce qui procure une correspondance directe entre ses divisions et celles de **C**. Par contre pour la correspondance avec les divisions de **D**, il est nécessaire de fermer la règle très exactement.

Rappelons, car l'oublier serait une cause d'erreurs dans ies lectures, que cette échelle est graduée (1 à 10) de droite à gauche (graduations et chiffres en rouge). L'index de départ désigné par **1CI** (analogie avec 1C) est donc à l'extrême droite et **10CI** est lui, à l'extrême gauche.

► Plaçons le Tc sur la division 2 de CI, nous trouvons en correspondance sur C (et sur D, règle fermée) la valeur 5.

Pourquoi ? Tout simplement parce qu'à la longueur totale de C (lg 10) nous retranchons la longueur 1 à 2 de CI qui représente lg 2. Nous trouvons donc sur C une valeur correspondant à : lg 10 – lg 2 = lg $\left(\frac{10}{2}\right)$= lg 5 grâce ici encore au principe de base de la règle: à tout nombre *x* lu sur CI, correspond le nombre $\frac{10}{x}$ sur C. Mais cette propriété est réversible, ce qui fait que l'on a également $\frac{10}{x}$ sur CI en face de *x* sur C. Nous dirons que la lecture conjuguée des échelles C et CI est réciproque, d'où le nom quelquefois donné à l'échelle des inverses.

► Par sa graduation, CI nous donne donc directement $\frac{10}{x}$ quand on place *x* sur C. Ce qui nous intéresse davantage, c'est l'inverse de *x* soit $\frac{1}{x}$. On voit que pour l'obtenir il suffit de diviser par 10 la lecture sur CI, d'où: $\frac{1}{2}$ = 0,5; $\frac{1}{3{,}8}$ = 0,263, etc...

► Tout se passe donc comme si CI était graduée en fait de 0,1 à 1, alors que C l'est de 1 à 10. Mais nous ne retiendrons pas cette façon de voir, car le principe de la règle veut que les nombres soient bien compris entre 1 et 10 et nous le respecterons pour l'échelle CI. C'est pourquoi nous sommes amenés à dire que la lecture de l'inverse d'un nombre (1 à 10) posé sur C se fera sur CI avec un Mp de lecture égal à - 1 avec le sens habituel de ce dernier soit : division par 10 du chiffre lu.

► Si nous désignons le coefficient -1 attaché à la simple lecture sur CI par Mp, c'est parce que, bien que la manipulation ne soit pas apparente, elle existe cependant. Elle est en effet faite en permanence et a consisté à placer l'échelle CI en coïncidence d'index avec C ; cela paraîtra plus évident en raisonnant avec CI et D. On ne peut lire l'inverse qu'après avoir placé 1CI sur 10D.

Nombre quelconque

Calculer l'inverse de 356, c'est calculer le quotient $\frac{1}{356}$ nous savons que pour ce dernier le Ct est + 2 changé de signe, soit - 2. Lisons alors l'inverse de 3,56, c'est 2,81 avec Mp - 1. Celui-ci ajouté au Ct précédent nous donne - 3, ce qui nous conduit pour l'inverse de 356 à la valeur exacte de 0,00281. Comme on le voit, nous avons scrupuleusement appliqué à ce cas, la loi du quotient, sauf que le Mp - 1 vient directement de la lecture, manipulation toute faite. Mais il faut ajouter, que la valeur de ce Mp reste logique, car l'inverse d'un nombre est bien le résultat d'une division.

Loi de l'inverse d'un nombre.

Placer le nombre réduit sur C et lire en face l'inverse sur CI. Le Ct applicable à la lecture est la somme du Ct du nombre changé de signe avec le Mp - 1.

Note. - Dans l'énoncé des lois pratiques, nous ne parlerons plus désormais du produit de la lecture par une puissance de, 10, car nous pensons que maintenant, la signification symbolique des Ct et Mp est bien acquise, dans l'esprit du lecteur.

Autres exemples :

$\frac{1}{0{,}017}$ = 58,8

Ct + 2 Mp-1, total + 1.

$\frac{1}{76}$ = 0,013 15

Ct - 1 Mp-1, total - 2

2. Application des Inverses.

L'emploi des inverses peut faciliter certains calculs classiques rencontrés principalement en électricité. Rappelons que la résistance X équivalente à deux résistances R_1, et R_2 ,mises en parallèle est donnée par l'expression : $\frac{1}{X}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.

De même pour deux condensateurs en série, on a :

$\frac{1}{Y}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$ Par une addition de valeurs inverses on obtient facilement X ou Y.

Soit R_1 = 158 ohms R_2 = 2 300 ohms

Les inverses sont 0,006 330 et 0,000 435. Leur somme est 0,006 765, dont l'inverse nous fournit X = 147,8 ohms.

3. Division avec l'échelle CI.

Nous avons expliqué ci-devant comment l'échelle des inverses réalisait la division $\frac{10}{x}$. Il est évident que par le déplacement de CI, non par rapport à C (impossible), mais par rapport à D, on peut effectuer des quotients quelconques $\frac{y}{x}$.

C'est ainsi qu'en amenant 1CI sur 5,6 de D et le Tc sur 3,5 de CI, on obtient 5,6 : 3,5 = 1,6 (*fig. 24*) avec une lecture

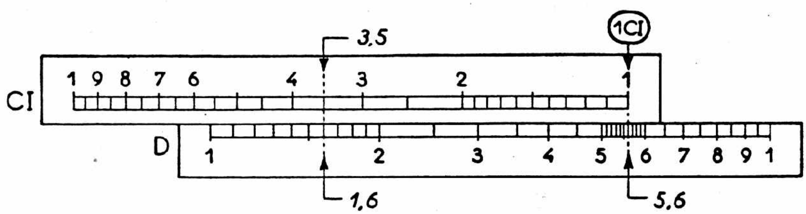

FIG. 24.

directe sur D. Si on essaye d'appliquer ce procédé au quotient 4,6 : 6,4, on aboutit à une lecture hors règle (*fig. 25*). Mais celle-ci peut-être rendue possible par le report de toute l'échelle qui ramène 10 CI au-dessus de 4.,6. La lecture est 7,18 mais doit être divisée par 10 pour donner le résultat exact : 0,718,

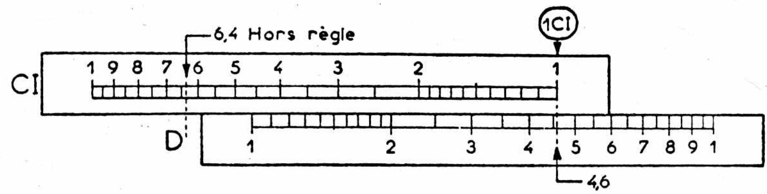

FIG. 25.

c'est dire que nous avons dans ce cas un Mp - 1, qui remarquons-le, intervient par suite de l'emploi de 10 CI (*fig. 26*).

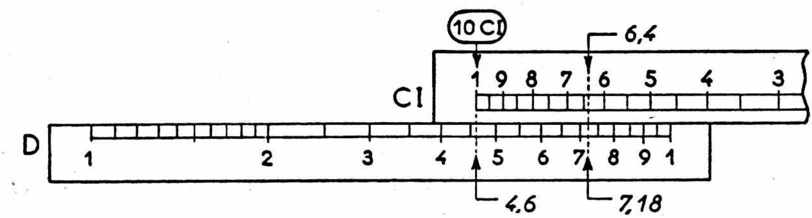

FIG. 26.

C'est donc à nouveau l'index 10 qui déclenche le Mp, avec cette différence qu'il se trouve pour l'échelle CI à gauche de la règle, mais la valeur du Mp, est toujours celle relative au quotient déjà étudié avec C.

En résumé, le quotient peut se calculer avec CI et D par une manoeuvre comparable à celle du produit avec C et D (index sur le premier facteur). La lecture est affectée de Mp 0 pour 1CI et Mp - 1 pour 10CI (attention: index de gauche). Le jeu des Ct des nombres quelconques reste le même que pour le quotient obtenu avec C.

4. Multiplication avec CI.

Diviser un nombre par l'inverse d'un autre, c'est en réalité faire une multiplication, car $x : \frac{1}{y} = xy$. Si donc nous réalisons avec CI et D, la manipulation propre au quotient nous obtiendrons un produit ; ceci est d'ailleurs le procédé précédent pris à reculons.

Vérifions ce fait en plaçant 3,4 de CI au-dessus de 2,4 de D (*fig. 27*) avec l'aide du Tc. Nous trouvons bien en face de 1CI et sur D : 8,16 = 2,4 x 3,4, lecture directe.

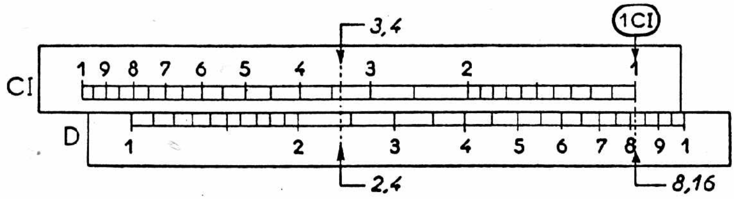

FIG. 27.

De la même façon, cherchons le produit 5,75 x 4,2 (*fig. 28*), le résultat se trouve maintenant sous 10CI, soit en lecture 2,415. Mais là encore, il faut tenir compte du Mp + 1, ce qui conduit à la valeur exacte de 24,15.

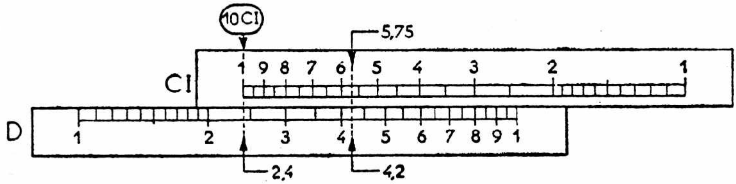

FIG. 28.

Nous voyons en final que le Mp du produit + 1 apparaît encore pour la même raison : l'emploi de l'index 10 pour lire le résultat.

Nous pouvons donc conclure que pour le produit et le quotient, effectués avec l'échelle des inverses, l'emploi de 10CI entraîne le Mp + 1 et -1 (analogie évidente avec l'emploi de C et D).

5. Cholx des échelles.

► Après cette étude de l'échelle des inverses, nous avons maintenant à notre disposition deux procédés pour effectuer un produit ou un quotient, suivant que l'on décidera d'utiliser C ou CI. Alors, dira-t-on, lequel doit-on employer ? Y-a-t-il des raisons qui font préférer une manière d'opérer à l'autre ? On peut répondre à ces questions de deux façons :

► Si on raisonne sur un plan de logique, on peut admettre que le calcul du produit avec C et du quotient avec CI, correspond exactement au principe de base de la règle. L'addition et la soustraction des longueurs est en effet réalisée directement par le jeu de la réglette.

► Si par contre on se place sur le plan pratique, on peut donner la préférence au calcul contraire, du produit avec CI et du quotient avec C, parce que ces deux procédés n'aboutissent jamais à une lecture hors règle, ce qui est un réel avantage.

► En définitive, nous dirons que le lecteur pourra utiliser habituellement l'un ou l'autre des procédés, à sa convenance, mais,qu'il ne doit pas oublier pour cela le moyen complémentaire qui peut, dans certains cas, faciliter la manipulation.

► C'est ainsi que dans les trois problèmes de la règle de trois, traités précédemment l'emploi de C et D est nécessaire pour poser le facteur constant $\frac{a}{b}$. Par contre nous allons voir que l'emploi de CI est d'un heureux effet dans les deux problèmes suivants.

1^er^ problème. - $xy = a$.

On rencontre fréquemment en physique ou mécanique des grandeurs x et y qui sont reliées par la relation $xy = a$, c'est-à-dire dont le produit est constant. Si l'on désire tracer la courbe donnant y en fonction de x, la règle nous donnera très rapidement les valeurs de y pour n'importe quelle valeur de x et ceci grâce à CI.

Nous prendrons comme exemple le calcul des fréquences hertziennes correspondant aux longueurs d'ondes, problème propre au radiotechnicien. Rappelons que la fréquence *F* (en kilohertz) et la longueur d'onde *L* (en mètres) sont reliées par la formule $F \times L = 300\,000 = 3 \times 10^5$.

►Dans une première disposition (*fig. 29*), plaçons 1CI en

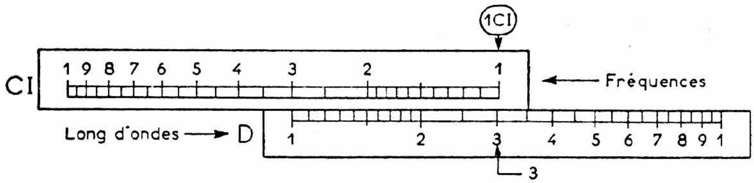

FIG. 29.

face de 3 de D ; nous reconnaîtrons alors que tous les nombres en vis-à-vis sur CI et D ont pour produit 3. Nous pouvons donc lire les fréquences sur CI et les longueurs d'ondes sur D et vice-versa. La virgule sera placée sans difficulté en tenant compte du Ct du produit + 5 et de celui de *F* ou *L*.

Exemples :						
	F	25000	2000	160	13	etc.
	L	12	150	1875	23 100	etc.

►Dans une deuxième disposition (*fig. 30*) nous placerons

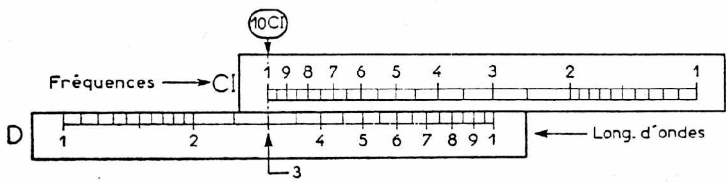

FIG. 30.

10CI en face de 3 de D pour obtenir les valeurs hors règle de la précédente.

Exemples :							
	F	7500	6000	920	625	33,3	etc.
	L	40	50	326	480	9 000	etc.

2e problème. - *Double produit d'un seul coup de réglette.*

Supposons que nous ayons à effectuer P = 2,84 x 4,65 x 1,59, si nous réalisons cette opération avec C et D en commençant par 2,84 x 4,65 puis x 1,59, nous obtenons après deux maniements de la réglette P = 21.

Maintenant opérons comme suit: d'abord effectuons le produit 2,84 x 4,65 avec CI et D (*fig. 31*), le résultat est sous

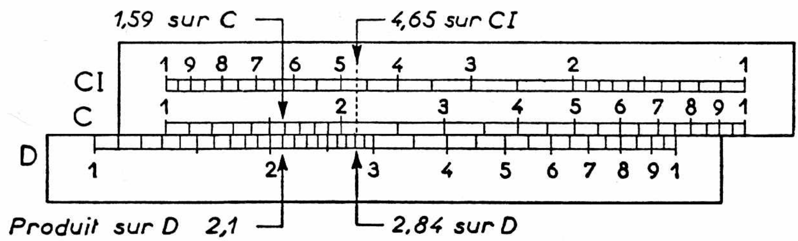

FIG. 31.

10CI, donc Mp + 1. Sans bouger la réglette, nous pouvons multiplier x 1,59 en décalant seulement le Tc sur cette valeur de C, le produit étant fait par 1C Mp 0. Nous retrouvons bien :
P = 21 (D) mais avec un seul mouvement de la réglette, ce qui est un avantage, procurant même une meilleure précision de lecture.

On voit par les deux exemples donnés que le lecteur aura intérêt à savoir utiliser avec autant d'habilité un procédé que l'autre, afin de pouvoir choisir toujours le plus pratique.

Synthèse des lois du produit et du quotient.

Maintenant que nous avons terminé l'étude détaillée des procédés qui permettent d'effectuer produits et quotients seuls ou combinés et ceci avec le choix de deux groupes d'échelles, pour les uns comme pour les autres, nous pouvons formuler la loi générale qui englobe toutes celles que nous avons déjà noncées.

►- Une fois l'opération posée, réduire tous les facteurs à des nombres compris entre 1 et 10 en les multipliant par 10*n*, ou plus simplement en décalant la virgule de n rangs vers la gauche ou vers la droite et noter Ct = *n* (positif ou négatif) lequel est aussi la caractéristique du logarithme du facteur.

►- Faire la somme algébrique des Ct de tous les facteurs du numérateur et de ceux, changés de signe, des facteurs du dénominateur (*Tableau*).

►- Effectuer avec la règle les opérations (nombres réduits) et noter Mp + 1 chaque fois qu'un produit est obtenu avec 10C ou 10CI, ainsi que Mp - 1 pour les quotients lus avec ces mêmes index. Faire la sommation de tous ces Mp (*Tableau*) et calculer ensuite $n = \Sigma$ Ct + Σ Mp. *n* est le Ct applicable à la valeur (1 à 10) du résultat.

►- Ceci sous-entend que la valeur lue doit être multipliée par 10*n* ou plus pratiquement, que l'on doit décaler la virgule du résultat de *n* rangs vers la droite (*n* positif) ou vers la gauche (*n* négatif).

Remarque importante. - Nous avons prétendu dans l'introduction, que la méthode préconisée était simple et rationnelle; faisons donc le point et constatons qu'elle s'appuie sur deux sortes de coefficients qui sont:

►1° Les Ct, qui ne sont autres que des caractéristiques de logarithmes, chose rationnelle puisque le calcul à la règle n'est qu'un calcul logarithmique déguisé.

►2° Les Mp qui sont aussi équivalents à des caractéristiques et sont introduits par le maniement de la règle.

<u>La méthode est par ailleurs vraiment simple, car :</u>

►1° Elle ne demande qu'une addition algébrique de nombres simples.

►2° La valeur exacte est obtenue par un simple décalage de la virgule.

►3° Le seul effort de mémoire demandé au lecteur, en ce qui concerne l'apparition des Mp au cours du calcul, se réduira à peu de chose, quand nous lui aurons donné comme moyen mnémonique la formule lapidaire suivante:

± 1 pour index 10.

En faisant sienne cette méthode, l'usager de la règle n'aura plus à chercher l'ordre de grandeur du résultat par un calcul sommaire ou mental; il trouvera la place exacte de la virgule avec sûreté et simplicité.

CHAPITRE 5

EMPLOI DE L'ÉCHELLE DES CARRÉS

Les notations abrégées relatives à cette échelle seront calquées sur les précédentes. Les lettres symboles gravées sur la règle serviront à désigner les deux échelles **A** de la règle et **B** de la réglette. Chaque échelle des carrés comporte deux sections identiques graduées de 1 à 10 (quelquefois 10 à 100 pour la deuxième), nous désignerons par **A1** et **B1**, les sections de gauche et **A2**, **B2**, celles de droite. Chaque échelle a donc, en conséquence, trois index qui se désigneront par leur valeur réelle (les zéros n'étant pas toujours gravés sur la règle), soit dans l'ordre 1A, 10A, 100A et 1B, IOB et 100B.

1. Produits et quotients avec A.B.

Naturellement, tous les calculs que nous avons effectués avec C, D, peuvent se faire aussi avec A, B. On considèrera, de préférence, que les échelles de calcul sont A1 et B1 et que A2 et B2 procure l'avantage de ne plus avoir de lecture hors règle pour le produit. C'est ainsi que la solution de calcul des problèmes de conversion permet d'avoir d'un seul coup toutes les valeurs de correspondance, ce qui est plus pratique. Mais en contrepartie, la précision de lecture est deux fois moindre qu'avec C, D, puisque l'échelle est moitié de longueur.

Pour les calculs réalisés avec A1, B1, et afin d'éviter toute erreur, on appliquera les lois déjà acquises pour les Mp en lisant bien entendu les divisions comme étant pour les deux sections, de 1 à 10. Lorsque le produit tombe sur A2, il y a donc Mp + 1 pour la lecture, ce qui nous amène à considérer que cette échelle A est affectée des Mp de lecture 0 pour A1 et + 1 pour A2.

En conclusion, sauf dans le cas des conversions d'unités, on n'a pas intérêt à utiliser A, B, pour le calcul des produits ou quotients.

2. Calcul du carré d'un nombre.

L'échelle **A**, **B**, imaginée par MANNHEIM, est principalement destinée, de par sa conception, au calcul direct du carré, d'où son nom.

2.1. - Nombre compris entre 1 et 10.

Chaque section de A est de longueur moitié de celle des nombres D. La distance entre 1 et 2 de A1, est donc la moitié du même intervalle de D. En doublant cette distance sur A1, on arrive au chiffre 4, ce qui est normal puisque $4 = 2^2$ et que $\lg 2^2 = 2 \lg 2$. Mais cet intervalle double correspond alors à 1 - 2 sur D. On a donc par là-même, réalisé la correspondance de 2 sur D, avec son carré sur A1. Cette propriété est évidemment valable pour tout nombre x de D, dont le carré x^2 sera en vis-à-vis sur A. On voit de suite que le carré d'un nombre compris entre 1 et $3{,}16 = \sqrt{10}$ se trouvera sur A1 en lecture directe (un chiffre, d'où l'indice choisi pour A1) et celui d'un nombre compris entre 3,16 et 10 sera lu avec Mp = + 1 sur A2 (2 chiffres d'où l'indice). On pourrait donc dire que l'échelle A est graduée en réalité de 1 à 100 mais pour respecter l'esprit général de cette méthode, nous conserverons l'emploi des Mp 0 et + 1 (avec lecture de 1 à 10) qui évitera toute erreur par la suite.

2.2. - Nombre supérieur à 10.

Nous allons ramener ce cas au précédent, en réduisant le nombre donné par l'artifice déjà appliqué lors du produit.

► C'est ainsi que nous écrirons :

$260^2 = (2{,}6 \times 10^2)^2 = 2{,}6^2 \times (10^2)^2 = 2{,}6^2 \times 10^4$

► Rappelons ici que : $(xn)^m = x^{nm}$. La règle nous donne

$2{,}6^2 = 6{,}76$ d'où $260^2 = 67\,600$.

Par cet exemple, nous constatons que le Ct du résultat est égal au produit du Ct du nombre par l'exposant 2 (carré) conformément, bien entendu au principe des logarithmes.

Si le carré du nombre réduit se lit sur A2, il faudra ajouter à 2 Ct le Mp + 1 de cette échelle.

Exemple : $x = 77$ Ct + 1 d'où (1 x 2) + 1 = +3, et
$x^2 = 5{,}93 \times 10^3 = 5\,930$.

2.3. - Nombre Inférieur à 1.

Nous sommes maintenant assez habitués à manier les Ct pour dire que pour les nombres inférieurs à 1, le procédé précédent s'applique en tenant compte que cette fois Ct est négatif. De plus Mp + 1 pour lecture sur A2 jouera le même rôle que ci-dessus.

Exemples : $0{,}13^2 = 0{,}016\,9$ Ct = (- 1 x 2) = -2
$0{,}045^2 = 0{,}002\,025$ Ct = (-2 x 2) + 1 = -3

Nous pouvons conclure ces trois paragraphes par :

2.4. - Loi du carré d'un nombre quelconque.

Placer le nombre réduit sur D et lire son carré en vis-à-vis sur A. Le Ct du carré cherché est égal à deux fois celui du nombre donné, augmenté de Mp + 1 pour lecture sur A2.

Exercice n° 5

Calculer les carrés des nombres suivants

a) 125 *b*) 0,37 *c*) 0,075 *d*) 28,5 *e*) 94,5 *f*) 548
g) 0,000 156 *h*) 8,6 *i*) 104 *j*) 0,216 *k*) 0,33 *l*) 4,8

3. Opérations combinées avec l'échelle des nombres.

Le calcul de certaines expressions (contenant un terme au carré) peut s'effectuer d'un seul coup de règle, donc rapidement en employant simultanément CD et AB. Nous allons étudier les cas les plus typiques et les plus souvent rencontrés.

3.1. - *1er genre.* - Calcul de xy^2, $\frac{y^2}{x}$, $\frac{x}{y^2}$.

Le maniement de la règle pour le calcul de la première expression *xy2* sera le suivant :

Placer 1C sur *y* de D, ce qui revient à mettre 1B sous y^2 de A, automatiquement, Sans lire ce carré qui ne nous intéresse pas, nous pouvons faire le produit par *x* sur A en amenant le Tc sur ce facteur lu sur B1 (*fig. 32*).

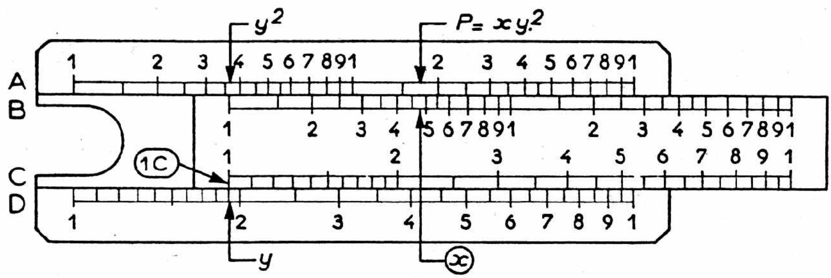

Fig. 32.

Le calcul du Ct de ce produit particulier peut se faire en appliquant à chaque fois les lois déjà connues. Mais on peut faire mieux et rendre l'opération plus systématique en prédéterminant les Mp de lecture, qui découleront des différentes valeurs des nombres réduits *x* et *y* et applicables directement au produit cherché. En analysant ce qui se passe pour toutes les valeurs possibles de *x* et *y* comprises entre 1 et 10 on trouve que tous les calculs considérés peuvent se ramener aux trois cas suivants:

►*-1er cas.* - Le résultat soit xy^2 se lit sur A1 ; il est en lecture directe, Mp 0.

►*-2e cas.* - Le résultat se lit sur A2 ; Mp + 1, valeur habituelle de cette échelle (carré).

►*-3e cas.* - Le résultat tombe hors règle à droite de 100A pour le rendre lisible, il faut décaler la réglette de toute sa longueur de manière à placer 10C sur *y* (au lieu de 1C). La lecture se retrouve alors sur A1, qui joue le rôle d'une troisième section de A. On aura donc Mp + 2.

Ayant ainsi déterminé trois valeurs de Mp suivant l'échelle de lecture, il nous restera à ajouter au Mp propre à chaque calcul, le Ct du produit qui est évidemment égal à Ct de *x* + 2 Ct de *y*. Cette méthode simplifie le calcul, puisqu'en pratique on n'a pas à se préoccuper du carré de *y* qui se trouve automatiquement incorporé par l'utilisation de A.

Illustrons ceci par les trois exemples suivants; correspondant chacun à des cas ci-dessus.

Exemples :

►*Nombres réduits :*

1er cas : $1{,}45^2$ x 3,9 = 8,2 Mp 0 (A1)
2e cas : $2{,}6^2$ x 5,4 = 36,5 Mp + 1 (A2)
3e cas : $5{,}75^2$ x 6,5 = 215 Mp + 2 (10C.A1)

►*Nombres quelconques :*

1er cas : 34^2 x 415 = 480 000
(+ 1 x 2) + 2 + 1 = + 5
2e cas : $0{,}75^2$ x 29,5 = 16,6
(-1 x 2) + 1 + 2 = + 1
3e cas : 650^2 x 0,071 = 30 000
(+ 2 x 2) -2 + 2 = + 4

Le calcul de la deuxième expression $\frac{y^2}{x}$ se traitera d'une manière analogue au précédent et qui se résume ainsi :

Maniement de la règle. - Placer le Tc sur *y* de D. Du même coup il est aussi sur y^2 de A. Amener *x* de B1 sous le Tc. Le résultat ou quotient $\frac{y^2}{x}$ se lira sur A avec les trois cas ci-après :

► 1er cas :- Lecture sur A1 avec 1B, Mp 0.
► 2e cas : - Lecture sur A2 avec 1B, Mp + 1.
► 3e cas :- Lecture avec 1B hors règle à gauche. En la multipliant par 10 on la retrouve sur A1 avec 10B ; Mp - 1.

Pour les nombres quelconques le jeu des Ct est toujours le même : Ct du quotient = 2 Ct de *y* - Ct de *x*.

Exemples :

► 1er cas : $\frac{19^2}{2,2} = 164$ Ct = (+ 1 x 2) + 0 + 0 = 2

► 2e cas : $\frac{0,55^2}{18} = 0,016\ 8$ Ct = 1 x 2) - 1 + 1 = - 2

► 3e cas : $\frac{2,2^2}{0,6} = 8,07$ Ct = (0 x 2) + 1 - 1 = 0

Nous donnerons le même résumé pour la troisième expression $\frac{x}{y^2}$ dont le calcul est voisin du précédent.

Maniement de la règle. - Placer le Tc sur *x* de Al. Amener sous le Tc, *y* de C donc aussi *y2* de B. Lire le quotient sur A suivant les cas :

► 1er cas. - Lecture sur A1 avec 1B, Mp 0.
► 2e cas. - Lecture sur A1 avec 10B, Mp - 1.
► 3e cas. - Lecture sur A1 avec 100B, Mp - 2.

Pour nombres quelconques : Ct de *Q* = Ct de *x* - 2 Ct de *y*.

Exemples :

▶ 1er cas : $\dfrac{7}{17{,}5^2} = 0{,}022\ 8$ Ct = 0 + (- 1 x 2) + 0 = - 2

▶ 2^{e} cas : $\dfrac{45}{3{,}2^2} = 4{,}4$ Ct = + 1 + 0 - 1 = 0

▶ 3^{e} cas: $\dfrac{275}{0{,}68^2} = 595$ Ct = + 2 + (1 x 2) -2 = + 2

Remarque. - Ces calculs effectués directement avec AB et CD sont vraiment plus rapides que faits sur CD seuls après calcul du carré. Mais il peut sembler que les Mp de lecture sont assez difficiles à retenir. On peut en cela, aider la mémoire par les considérations logiques suivantes :

▶ Pour les trois expressions étudiées un résultat lu sur B1 a toujours Mp 0 et sur B2 + 1, c'est-à-dire ceux de l'échelle A (carrés).

▶ Si le résultat est hors règle à droite (A3 fictive), son report conduit à Mp + 2.

▶ Si le résultat est hors règle à gauche, ce sera toujours Mp -1 pour un report (10B) ou - 2 pour deux reports (100B). Nous indiquerons en outre, en fin de chapitre, un moyen simple de retrouver ces différents Mp.

Exercice n^{o} 6

a) 75^2 x 0,34 b) $5{,}25^2$ x 0,018 c) $16{,}7^2$ x 33
d) $0{,}47^2$ x 128 e) $0{,}012^2$ x 63 f) $0{,}022\ 5^2$ x 835

g) $\dfrac{62{,}5^2}{7{,}8}$ h) $\dfrac{7{,}85^2}{0{,}425}$ i) $\dfrac{0{,}283^2}{0{,}0678}$ j) $\dfrac{186^2}{74}$

k) $\dfrac{3{,}7}{0{,}52^2}$ l) $\dfrac{18{,}7}{4{,}8^2}$ m) $\dfrac{0{,}735}{12{,}6^2}$ n) $\dfrac{3300}{2{,}5^2}$

3.2. – *2° genre*. - Surface du cercle.

La surface d'un cercle de diamètre *d* est donnée par :

$S = \frac{\pi}{4} d^2$. c'est donc un cas particulier de la première expression étudiée précédemment. Etant donné son importance exceptionnelle, la règle a été agrémentée de moyens spéciaux destinés à accélérer ce calcul. Comme le facteur $\frac{\pi}{4}$ = 0,785 est constant : on a pu le marquer sur la règle sous plusieurs formes.

a) Repères sur la règle.

On trouve sur les échelles A2 et B2, un trait repère à la valeur 7,85 qui en réalité représente 0,785. On voit d'après cette valeur que la surface est légèrement inférieure à d^2, ce qui nous permet de dire que le Mp de lecture du carré va se conserver pour la surface sur A1 et A2, soit 0 et + 1.

La manipulation est la suivante : placer **10C** sur le diamètre *d* de l'échelle **D**, la surface sera obtenue sur **A** en face du repère $\frac{\pi}{4}$ = 0,785 de **B2**.

Exemples :

d = 2,15	3,5	5,40	7,68
S = 3,63	9,62	22,9	46,20

Pour les nombres quelconques, il suffira d'ajouter au Mp le Ct du carré de *d*, ou : 2 x Ct de *d*.

Ainsi pour :	*d* = 43,5	*S* = 1980	(1 x 2) +1 = + 3
	d = 0,27	*S* = 0,073	(- 1 X 2) + 0 = - 2

Pour les règles modernes qui sont dotées d'une extension d'échelle vers la gauche de 1C et 1A, on peut trouver *S* si *d* est compris entre 1 et 1,129. La lecture se faisant à gauche de 1A, on a évidemment Mp - 1.

Quant aux règles anciennes, elles possèdent un autre trait repère sur C, situé à cette valeur : $1{,}129 = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ qu'il suffit alors de placer sur *d* de D pour obtenir une lecture reportée au-dessus de 10B - (Mp - 1.). Ce repère marqué en général par la lettre C peut d'ailleurs servir à d'autres valeurs de *d* supérieures à 1,129.

Si on doit effectuer une série de calculs de surfaces, on peut aussi disposer la réglette de manière à lire *S* pour toutes valeurs de *d*. Pour cela, on placera 100B sous le repère 7,85 de A2 (*fig. 33*). A ce moment, on peut placer le diamètre sur C et

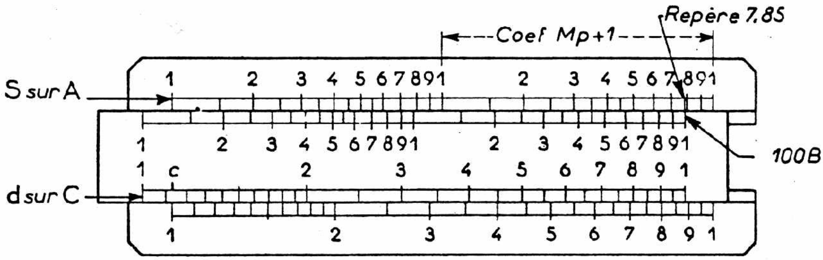

FIG. 33.

lire la surface sur A pour toutes les valeurs de *d* supérieures à 1,129. Pour les autres, on remplacera 100B par 1B (inutile si extension de A1).

b) Curseur trois traits.

Depuis longtemps (MANNHEIM) la règle possède un curseur muni de trois traits, soit un de chaque côté du trait central. La distance entre celui-ci et chacun des deux autres est justement égale à 0,785 de l'échelle A. La surface peut ainsi se calculer sans déplacer la réglette. En plaçant le trait central sur *d* de D, le trait de gauche donnera directement *S* sur A avec les Mp habituels de 0 et + 1 puis - 1 pour lecture sur l'extension à gauche de 1A.

Exercice n° 7

Calculer S pour les diamètres suivants :
a) 16,8 *b*) 425 *c*) 0,282 *d*) 0,081 *e*) 3,4 *f*) 0,11

c) Poids des fils ou barres de fer.

La densité moyenne du fer est de 7,85, c'est-à-dire, chose curieuse, égale à $\frac{\pi}{4}$, à la virgule près. Ceci nous permet de trouver le poids d'une barre de fer de section circulaire en utilisant les trois traits du curseur, donc très rapidement. Nous préciserons d'abord les unités pratiques correspondant à l'usage courant: si d est exprimé en centimètres, le poids sera obtenu en kilogrammes par mètre.

Le trait droit du curseur sera placé sur d de D ; le trait central donnera sur A la section (cm^2) et celui de gauche directement le poids (aussi A).

Exemple : d = 27 mm = 2,7 cm P = 4,5 kg/m
d = 63 mm = 6,3 cm P = 24,5 kg/m

On peut aussi admettre ce procédé pour des barres de laiton dont la densité est très voisine de celle du fer.

d) Calcul du diamètre d'un cercle.

C'est le calcul inverse du précédent, qui sera donc effectué en prenant le procédé ci-dessus à reculons. La surface ramenée à être comprise entre 1 et 100 sera placée sur A sous le trait central du curseur et le diamètre se lira sur D sous le trait de droite avec Mp 0, sauf pour lecture à droite de 10D où Mp = + 1 (extension). Pour mieux saisir ce calcul et passer aux nombres quelconques pour S, voir plus loin l'étude de la racine carrée.

3.3. - *3e genre.* - Calcul de $x^2 y^2$ et $\frac{y^2}{x^2}$.

On remarque de suite que $x^2 y^2 = (xy)^2$ ce qui nous fournit le processus simple: effectuer le produit xy et lire le résultat cherché sur l'échelle des carrés.

On a quatre cas de lectures possibles, qui se résument ainsi :

►**1°** Produit effectué avec 1C (ou 1CI) et lecture de x^2y^2 sur A1 avec Mp 0 ou sur A2 avec Mp + 1.

►**2°** Produit avec 10C (ou 10CI) lecture sur A1 avec Mp + 2 ou sur A2 avec Mp + 3.

►**P**our des nombres quelconques, on ajoutera au Mp précédent, les Ct des facteurs soit 2 x (Ct de x + Ct de y).

Exemples : I,8^2 x 3,4^2 = 37,5 Mp + 1
465^2 x 0,63^2 = 85 800
Ct = (2 x 2) + (-1 x 2) Mp + 2, total + 4

Nota. - En faisant $y = x$, l'expression devient x^4.

Le calcul précédent conduit à la puissance quatrième d'un nombre. Le Ct total étant, bien sûr, égal à 4 x Ct de x.

Exemple : x = 0,85^4 Ct = 4 x (- 1)= - 4, Mp + 3, total - 1, -d'où 0,85^4 = 0,521.

Pour la deuxième expression, on a aussi : $\frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2$

On prendra donc le carré du quotient indiqué sans difficulté avec le résumé des quatre cas de lecture :

►**1°** Quotient effectué avec 1C (ou 1 CI) Mp 0 pour lecture sur A1 et Mp + 1 sur A2.

►**2°** Quotient effectué avec 10C (ou 10CI) Mp - 2 pour lecture sur A1 et Mp - 1 sur A2.

►**P**our des nombres quelconques, on ajoutera les Ct des facteurs soit 2 x (Ct de y - Ct de x).

Exemples : 0,72^2 : 1,68^2 = 0,184
Ct = (- 1 x 2) +0 ; Mp +1, total -1
1,45^2 : 0,65^2 = 4,98
Ct = -0 + (+l x 2) ; Mp -2, total 0

Exercice n° 8

Calculer les carrés des produits ou quotients :

a) 24 x 0,16 b) 11,15 x 0,021 c) 84,5 x 1,82 d) 0,67 x 23,6

e) 0,044 x 3,2 f) 5,25 x 90,5 g) $\frac{48,5}{1,33}$ h) $\frac{6,7}{0,39}$ i) $\frac{0,72}{8,55}$

j) $\frac{15,65}{687,5}$ et k) $3,75^4$ l) $0,82^4$ m) $27,4^4$

4. Racine carrée d'un nombre.

Calculer la racine carrée d'un nombre, c'est chercher le nombre qui élevé au carré reproduit le nombre donné, Ce calcul fastidieux par l'arithmétique devient d'une extrême facilité grâce à la règle. Il découle naturellement du calcul d'un carré, puisqu'il en est le calcul inverse, d'où le processus ci-après presque évident.

4.1. - Nombre compris entre 1 et 100.

Pour poser le nombre donné, il faut tenir compte que c'est implicitement un carré, il sera donc posé sur A en tenant compte des Mp de lecture de cette échelle. Ainsi un nombre de 1 à 10 (un chiffre) sera lu. sur A1 et un nombre de 10 à 100 (deux chiffres) sur A2 (Mp + 1). On peut ici, et seulement pour le calcul d'une racine, admettre que A2 est bien graduée de 10 à 100. On comprend de suite que la racine sera trouvée sur D en lecture directe pour tous les nombres (1 à 100). Ainsi:

$$\sqrt{4,5} = 2,12 \qquad \sqrt{53} = 7,28$$

4.2. - Nombre supérieur à 100.

On ramènera ce cas au précédent par une réduction du nombre donné. Celle-ci se fera en divisant le nombre par un multiple de 100, jusqu'à ce qu'il soit compris entre 1 et 100. Pratiquement et c'est plus simple, on décale la virgule vers la gauche de *n* rangs de deux chiffres pour qu'il reste un ou deux chiffres; ce qui donne immédiatement le Ct de la racine Ct = *n*.

Exemples : $\sqrt{750}$ Ct = 1 d'où $\sqrt{750}$ = 2,74 x 10 = 27,4

$\sqrt{3500}$ Ct = 1 d'où $\sqrt{3500}$ = 5,91 x 10 = 59,1

4.3. - Nombre Inférieur à 1.

Pour un tel nombre la réduction se fera, de façon analogue en décalant la virgule vers la droite, de *n* rangs de deux chiffres, jusqu'à ce qu'il reste un nombre de un ou deux chiffres différents de zéro. On aura encore pour la racine Ct = *n*, mais cette fois *n* est négatif.

Exemples : $\sqrt{0{,}046}$ = 0,214 5 Ct = - 1 ($\sqrt{4{,}6}$)

$\sqrt{0{,}0018}$ = 0,042 4 Ct = - 2 ($\sqrt{18}$)

Tous les exemples donnés se résument comme suit:

4.4. - Loi de la racine carrée.

Réduire le nombre donné pour qu'il soit compris entre 1 et 100 (un ou deux chiffres) en décalant la virgule par tranches de deux chiffres vers la gauche ou vers la droite. Le Ct de la racine est égal au nombre de tranches utilisé, et positif (gauche) ou négatif (droite). Le nombre réduit sera posé sur A1, s'il a un chiffre ou A2 s'il en a deux ; la racine est lue sur D directement (Mp 0).

Remarque. - On pourra aussi vérifier que le Ct de la racine est égal à celui du nombre divisé par 2 (indice du radical), mais ce calcul est moins commode que le procédé du décalage de la virgule, surtout dans le cas des caractéristiques négatives.

Rappelons, à titre d'exemple que pour lg 0,004 7 = $\bar{3}{,}672$ dont la caractéristique est - 3, on ne peut faire la division par 2 qu'en écrivant

$$\bar{3}{,}672 = (-3 - 1) + (1 + 0{,}67) = -4 + 1{,}672,$$

ce qui donne lg $\sqrt{0{,}0047} = \bar{2}{,}836$. On a, d'autre part, à décaler de deux tranches pour obtenir la réduction à 47, Ct = 2. C'est aussi la caractéristique trouvée.

Exercice n° 9

Calculer les racines carrées des nombres :

a) 533 b) 625 000 c) 27,5 d) 1875 e) 8,45
f) 0,23 g) 0,049 h) 0,092 i) 0,84

5. - Opérations combinées avec échelle des nombres.

Quand l'expression d'un calcul contient un radical, on peut accélérer la manipulation en combinant les échelles AB et CD. Mais cette fois la chose est plus simple qu'avec un terme au carré, tel qu'on l'a vu au § 3, car le calcul reste au niveau d'un simple produit ou quotient.

5.1. - *1er genre*. - Calcul de $y\sqrt{x}$, $\dfrac{y}{\sqrt{x}}$, $\dfrac{\sqrt{x}}{y}$

On voit facilement que la première expression $y\sqrt{x}$ se calcule comme un produit avec cette particularité que le deuxième facteur (radical) se trouvera calculé automatiquement par la pose de *x* sur l'échelle des carrés (B), mais n'a pas besoin d'être lu.

On place donc *y* réduit sur D, puis *x* réduit (1 à 100) sur B et on tient compte du Mp + 1 pour le produit s'il y a lieu (10C) ainsi que des Ct des deux facteurs *y* et $\sqrt{x}$.

Exemples :

$27\sqrt{420} = 553$	Ct + 1 + 1	Mp 0	total + 2
$0{,}75\sqrt{2400} = 36{,}8$	Ct - 1 + 1	Mp + 1,	total + 1
$455\sqrt{0{,}60} = 353$	Ct + 2 - 1	Mp + 1,	total + 2

Les deux autres expressions seront calculées comme un quotient en posant toujours *x* sur A ou B et *y* sur C ou D, lois habituelles pour Mp et Ct (attention au changement de signe pour le dénominateur).

Exemples :

$\frac{384}{\sqrt{5,5}} = 163,7$ Ct + 2 + 0 Mp 0, total + 2

$\frac{22}{\sqrt{0,6}} = 28,4$ Ct + 1 + 1 Mp - 1, total + 1

$\frac{\sqrt{745}}{0,34} = 80,3$ Ct + 1 + 1 Mp - 1, total + 1

Exercice n^o 10

a) $0,42\sqrt{740}$ b) $375\sqrt{0,59}$ c) $1875\sqrt{0,064}$ d) $\frac{0,734}{\sqrt{28}}$

e) $\frac{37}{\sqrt{5650}}$ f) $\frac{0,245}{\sqrt{0,0076}}$ g) $\frac{86}{\sqrt{0,194}}$

5.2. - *2e genre*. - Diamètre d'un cercle.

La formule de calcul est $d = 1,129\sqrt{S}$, donc du genre précédent avec *y* en facteur constant. Nous avons indiqué le maniement du curseur (§ 3.2. *d*), nous ajouterons seulement que pour les nombres quelconques de *S*, ceux-ci seront réduits comme l'exige la loi de la racine carrée, ce qui est très normal d'après la formule.

Exemples :

$S = 650$	Ct + 1		$d = 28,8$
$S = 0,35$	Ct - 1		$d = 0,667$
$S = 9000$	Ct + 1	Mp + 1	$d = 107$

Exercice no 11

Calculer *d* pour les surfaces suivantes :
a) 375 b) 87 c) 0,48 d) 0,029 e) 1 780 f) 0,053

5.3 - *3e genre*. - Calcul de $\sqrt{x\sqrt{y}}$ et $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

Cette fois, on a affaire à un produit ou quotient dont chaque facteur donné sera posé sur l'échelle des carrés. Aucune difficulté si l'on tient compte des Ct des deux radicaux et du Mp propre à l'opération (± 1).

Exemples :

$\sqrt{4{,}75}\times\sqrt{14}=8{,}5$	Ct = 0	Mp 0
$\sqrt{275}\times\sqrt{0{,}18}=7{,}04$	Ct + 1 - 1 = 0	Mp 0, total 0
$\sqrt{0{,}58}\times\sqrt{135000}=280$	Ct -1 + 2 = + 1	Mp + 1, total +2
$\dfrac{\sqrt{560}}{\sqrt{0{,}106}}=72$	Ct + 1+1 =+2	Mp-1, total +1

Exercice n° 12

a) $\sqrt{52}\times\sqrt{0{,}375}$ b) $\sqrt{645}\times\sqrt{22}$ c) $\sqrt{00{,}28}\times\sqrt{149}$.

6. Opérations combinées avec l'échelle des Inverses.

Par la simple correspondance entre l'échelle des carrés A et l'échelle des inverses CI, on peut calculer les deux expressions:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}}$$

Pour la première, nous placerons *x* sur CI pour lire $\dfrac{1}{x^2}$ sur A avec Mp - 2 pour lecture sur A1 et - 1 sur A2.

Exemples :				
	x = 1,5	2,5	3,7	6,5
	$1/x^2$ = 0,445	0,16	0,073	0,0236

Pour la deuxième, nous placerons *x* sur A pour lire $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur CI avec Mp - 1. Ici le nombre donné sera réduit entre 1 et 100 dans le cas d'un nombre quelconque.

Exemples : $x =$ 2 3 6,5 18 45

$\frac{1}{\sqrt{x}} =$ 0,707 0,578 0,392 0,236 0,149

Pour les deux calculs avec nombres quelconques ajouter au Mp de lecture le Ct du dénominateur x^2 ou $\sqrt{x}$, c'est-à-dire Ct de ces facteurs changés de signe.

7. Conclusion.

On a vu, par tous les exemples de calcul étudiés, que l'emploi des échelles des carrés rend les opérations très rapides. Il est vrai que la précision obtenue ainsi est moindre qu'avec un calcul effectué en entier (carré compris) avec CD, mais en pratique elle est souvent suffisante. Par ailleurs, l'emploi de A est irremplaçable pour le calcul d'une racine et nous indiquerons plus loin un moyen simple d' augmenter la précision de cette opération.

Appendice

Détermination directe des Mp d'un calcul complexe.

Le lecteur sera certainement d'accord sur la commodité des calculs effectués en conjuguant l'emploi de AB avec celui de CD et CI, à condition de connaître les différents Mp de lecture. Mais il est possible qu'il n'ait pas sous la main ce livre où il peut les trouver. C'est pourquoi nous allons donner un procédé simple pour les déterminer directement aussi bien pour les exemples étudiés ci-dessus, que pour n'importe qu'elle autre expression que l'usager d'une règle peut avoir à se donner.

Considérant la formule de calcul, par exemple: $P = xy^2$ cherchons les valeurs limites de P en attribuant à x et y leurs valeurs extrêmes, soit 1 et 10. Avec $x = y = 1$, nous trouvons :

$P = 1$, puis avec $x = y = 10$ $P = 1000 = 10^3$, on peut alors affirmer que pour des faibles valeurs de x et y, P sera compris entre 1 et 10, d'où Mp 0, et aussi que pour les plus fortes valeurs, P sera compris entre 10^2 et 10^3, d'où Mp + 2. Par suite pour des valeurs intermédiaires, on pourra avoir P entre 10 et 10^2, d'où Mp + 1. On obtient donc par ce procédé, d'une part, le nombre de cas de lecture de P (ici trois) et les valeurs de Mp, soit dans l'ordre 0, + 1 et + 2. Comme la lecture de P se fait sur A, on sait que cette échelle a pour Mp de lecture 0 et + 1, ce qui permet de situer exactement les deux premiers Mp du calcul complexe. Le troisième sera la conséquence d'une lecture hors règle, facile à retrouver avec un essai sur la règle, en essayant par exemple $x = y = 8$, puisque Mp + 2 provient des fortes valeurs des facteurs.

Si l'expression contient un des facteurs en ,dénominateur exemple $P = \frac{x}{y^2}$ il faut faire attention, car dans ce cas la valeur minimale de P sera obtenue en donnant à y la valeur limite supérieure et vice-versa. C'est ainsi qu'on obtient pour $x = 1$, $y = 10$, $P = 10^{-2}$, puis pour $x = 10$, $y = 1$, $P = 10^1$.

Les Mp seront donc dans l'ordre - 2, - 1 et 0. Ce dernier Mp, le plus grand, est toujours inférieur d'une unité à l'exposant de 10 de la valeur limite maxima de P. On peut ici conclure n'avoir qu'une lecture directe sur A1 (Mp = 0), les deux autres étant certainement obtenues pour un report d'index, d'une ou deux longueurs d'échelle (A1). C'est bien ce qui a été dit à l'étude de cet exemple, précédemment.

On peut aussi remarquer que le nombre de cas de lecture est égal au nombre de facteurs dans l'expression donnée, un carré étant compté pour deux facteurs.

Le lecteur pourra vérifier tout ce qui précède en l'appliquant à l'expression $P = \frac{xy^2}{z}$ dont nous dirons que les Mp sont - 1, 0, + 1 et + 2, ce qui sous-entend deux cas de lecture hors règle, que l'on aura à reporter par un changement d'index.

CHAPITRE 6

EMPLOI DE L'ÉCHELLE DES CUBES

1. Calcul du cube avec l'échelle des carrés.

Si la règle utilisée n'est pas munie d'une échelle des cubes (MANNHEIM), ou si l'on a besoin d'une valeur plus précise que celle donnée par cette échelle, on peut faire le calcul avec l'échelle des carrés et celle des nombres en s'appuyant sur l'expression du premier genre (§ 3.1) $P = xy^2$, en effet, si $y = x$, elle devient $P = x^3$ et le maniement de la règle est le suivant (*fig. 34*).

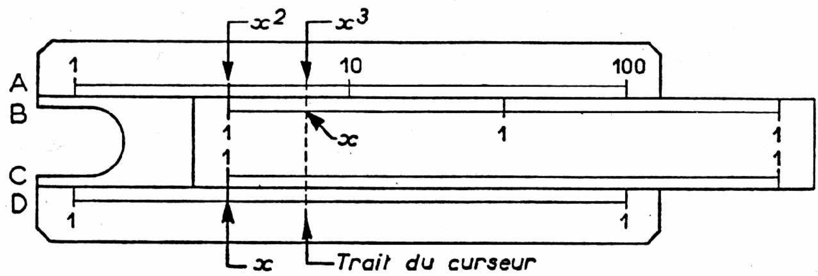

FIG. 34.

► Placer **1C** sur x de **D**, puis le **Tc** sur x de **B1**. Le cube x^3 se lira sur **A**, avec les Mp déjà connus, soit 0, + 1 et + 2. Ce dernier par suite de l'emploi de 10C, qui évite le hors règle.

► Le calcul d'une racine cubique peut aussi se faire par le procédé indiqué, pris à reculons. Poser le nombre donné (de 1 à 100) sur A1 ou A2, avec le Tc puis tirer la réglette vers la droite en lisant les nombres qui défilent sous 1C (D) et sous le Tc (A1). Lorsqu'on peut lire le même chiffre sous ces deux repères c'est la racine cubique.

► Pour un nombre compris entre 100 et 1000, le placer sur A1 et tirer la réglette à gauche pour utiliser 10C au lieu de 1C, mais de la même façon. Cette méthode, par tâtonnement est peu commode mais seule l'échelle spéciale dont est munie la règle de RIETZ, peut éviter d'y avoir recours. On trouvera au chapitre 7 un procédé semblable mais plus agréable.

2. Cube d'un nombre avec l'échelle K.

L'échelle des cubes (symbole K) est généralement située sur la règle au-dessus de celles des carrés. Son principe est identique à celles-ci: la longueur d'un intervalle 1- x sur K est le tiers du même de l'échelle CD. C'est pourquoi, en vis à vis de x de D, nous trouvons la valeur de x^3 Sur K. Par la même, K a trois sections de longueurs égales que- nous désignerons de gauche à droite par K1, K2 et K3. Elle a ainsi quatre index, désignés par 1K, 10K 100K, 1000 K, d'après leur vraie valeur, bien que les zéros ne soient pas toujours marqués sur la règle.

2.1. - Cube d'un nombre compris entre 1 et 10.

Il suffit de placer le Tc sur ce nombre de D pour lire, en correspondance sur K, son cube. Ce dernier est donc compris entre 1 et 1000, car on pourrait considérer cette échelle, comme graduée ainsi. Cependant ici encore, on oubliera ce fait, en lisant sur chaque section les nombres de 1 à 10, et en tenant compte des Mp 0 pour lecture sur K1, Mp + 1 sur K2 et Mp + 2 sur K3, ce qui revient au même mais évite toute erreur dans le cas général ci-après,

2.2. Cube d'un nombre quelconque.

Par analogie directe avec ce que nous avons vu pour les carrés, le nombre donné sera réduit avec le Ct habituel et celui du cube sera le triple de celui-là. En y ajoutant le Mp de lecture sur K, on obtiendra le Ct total, d'où :

Exemples :	14^3 = 2 740	(1 x 3) + 0 = + 3
	385^3 = 57 000 000	(2 x 3) + 1 = + 7
	$0{,}65^3$ = 0,275	(- 1 x 3) + 2 = - 1
	$0{,}026^3$ = 0,000 017 6	(-2 x 3) + 1 = - 5

Exercice n° 13

Cubes de x =

a) 28 b) 7,8 c) 0,185 d) 0,084

2.3. - opérations combinées avec CD.

L'emploi simultané des échelles CD et de K permet le calcul d'expressions analogues à celles étudiées pour les carrés. Bien que moins fréquentes que celles-ci, nous en indiquerons rapidement leurs lois faciles à déduire des précédentes.

►*1er genre*. - **Calcul de** xy^3 **et** $\frac{x}{y^3}$ **.**

Pour la première formule on place *x* sur K1 et 1C en vis-à-vis grâce au Tc, puis on décale le Tc jusqu'à la valeur *y* de C. La lecture du résultat se fait sur K1 avec Mp 0, K2 (+ 1), K3 (+ 2). Une quatrième lecture hors règle à droite se ramène sur K1 par l'emploi de 10C, d'où Mp + 3.

Pour des nombres quelconques on ajoutera au Mp, le Ct du produit, soit: Ct de *x* + 3 Ct de *y*.

Exemples :

25 x $1{,}35^3$	= 61,6	+ 1 + 0 + 0 = + 1
32 x $0{,}25^3$	= 0,5	+ 1 + (-1 x 3) + 1 = - 1
0,062 x 37^3	= 3 140	- 2 + (1 x 3) + 2 = + 3
550 x $0{,}073^3$	= 0,214	+ 2 + (-2 x 3) + 3 = - 1

Remarque. - Si on fait *y* = *x*, on obtient x^4, d'où un

deuxième moyen de calculer la puissance 4 d'un nombre, mais moins précis que celui obtenu précédemment avec A.
Pour la deuxième formule, on place Tc sur *x* de K1 et on amène en vis-à-vis *y* de D. La lecture se fera avec 1C sur K1, Mp 0, ou

bien avec 10C : sur K3, Mp - 1
sur K2, Mp - 2
sur K1, Mp - 3.

Pour des nombres quelconques ajouter : Ct de *x* - 3 Ct de *y*

Exemples : Nombres réduits :

$$\frac{7}{3{,}4^3} = 0{,}178 \qquad \frac{2{,}6}{8{,}3^3} = 0{,}00454$$

Nombres quelconques :

$$\frac{35}{0{,}25^3} = 2240 \qquad + 1 (- 1 \times 3) -1 = + 3$$

$$\frac{620}{53^3} = 0{,}00417 \qquad + 2 - (1 \times 3) - 2 = - 3$$

$$\frac{28}{7{,}2^3} = 0{,}075 \qquad + 1 + 0 - 3 = - 2$$

►*2e genre.* - Calcul de $x^3 y^3$ et x^6.

Cela revient à lire le cube d'un produit effectué sur CD. Celui-ci étant obtenu avec 1C, les Mp sont ceux de K : 0, + 1 et + 2, s'il est obtenu avec 10C. ils sont dans l'ordre : 3 + 4 +5.

Pour les nombres quelconques, ajouter 3 x (Ct de *x* + Ct de *y*). Si *y* = *x*, on obtient x^6, calculable d'un coup de réglette avec mêmes procédés et Mp. Le Ct pour un nombre quelconque est 6 Ct de *x*.

Exemples : Cube des produits :

$12{,}5 \times 1{,}6 = 8\,000$	$(1 \times 3) + 0 + 0 + 3$
$1{,}5^2 \times 0{,}2^2 = 0{,}037\,5$	$0 + (-1 \times 3) + 1 = -2$
$0{,}4^3 \times 3{,}05 = 2{,}26$	$(-1 \times 3) + 0 + 3 = 0$
$74, \times 0{,}081 = 216$	$(1 \times 3) + (-2 \times 3) + 5 = +2$
et : $27^6 = 388\,000\,000$	$(1 \times 6) + 2 = 8$
$0{,}56^6 = 0{,}030\,8$	$(-1 \times 6) + 4 = -2$

Exercice n° 14

Calculer le cube des produits

a) $1{,}32 \times 3{,}02$ b) $72{,}5 \times 0{,}24$ c) $0{,}52 \times 6{,}7$ d) $0{,}014 \times 31$

et : e) $0{,}72^6$ f) $12{,}3^6$

3. Racine cubique d'un nombre.

Le calcul d'une racine cubique est l'inverse de celui d'un cube, il est donc effectué très facilement avec l'échelle K comme suit :

3.1. - Nombre entre 1 et 1 000.

Le nombre donné sera posé: s'il a un chiffre, sur K1, s'il en a deux sur K2 et s'il en a trois, sur K3 (ceci indique les indices choisis pour les trois sections). Seulement pour ce calcul, on peut considérer K comme graduée de 1 à 1000. La racine est sur D en vraie grandeur.

3.2. Nombre quelconque.

La réduction du nombre donné se fera en décalant la virgule par tranches de trois chiffres, et le Ct de la racine sera égal au nombre de tranches utilisé, positif pour décalage à gauche et négatif, si à droite. Analogie directe avec la racine carrée.

Exemples :

$\sqrt[3]{47000} = 36{,}1$	Ct + 1 ($\sqrt[3]{47}$)
$\sqrt[3]{154000000} = 536$	Ct + 2 ($\sqrt[3]{154}$)
$\sqrt[3]{0{,}0019} = 0{,}124$	Ct - 1 ($\sqrt[3]{1{,}9}$)

Exercice no 15

Calculer la racine cubique des nombres :
a) 879 b) 4 850 c) 0,032 5 d) 186 000 000
e) 0,235 f) 77,3

3.3. - Opérations combinées avec CD.

Les calculs possibles en utilisant K conjointement avec CD. sont du niveau d'un produit ou d'un quotient dont l'un des termes (ou les deux) est posé sur C ou D par l'intermédiaire de K. Mais du fait que cette échelle n'est pas mobile comme B pour les racines carrées, la manipulation prend une forme particulière.

► 1^er *genre*. - **Calcul de** $y \times \sqrt[3]{x}$ et $\frac{\sqrt[3]{x}}{y}$ et $\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$

Pour les deux premières expressions, la manipulation reste identique à celle de la racine carrée, puisque le facteur radical peut être posé le premier sur D, en plaçant le Tc sur *x* de K. Le produit et le quotient seront effectués très normalement en plaçant *y* sur C ; Mp + 1, si emploi de 10C (Ct habituels).

Exemples :

$3 \times \sqrt[3]{40} = 10{,}26$ Mp + 1

$\frac{\sqrt[3]{75000}}{0{,}275} = 153{,}3$ Ct + 1 + 1, Mp 0, total + 2

Voyons maintenant le troisième calcul par l'exemple $\frac{2{,}34}{\sqrt[3]{42}}$. Pour le résoudre, nous poserons le quotient inverse soit $\frac{\sqrt[3]{42}}{2{,}34}$ dont le résultat se lit sous 1C. Mais face à 10D, on peut lire son inverse sur C, soit 6,74 avec évidemment Mp - 1, d'où le quotient cherché = 0,674.

Si la lecture se fait au-dessus de 1 D, le, Mp est 0.

Exemple :

$$\frac{3{,}75}{\sqrt[3]{17}} = 1{,}46$$

On voit que le Mp - 1 du quotient apparait ici aussi avec l'index 10 (10D).

Exercice n° 16

a) $57 \times \sqrt[3]{0{,}035}$ b) $0{,}136 \times \sqrt[3]{635}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{0{,}144}}{28}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{37}}{0{,}51}$ e) $\dfrac{0{,}33}{\sqrt[3]{215}}$ f) $\dfrac{420}{\sqrt[3]{17}}$

►*2e genre*. **Calcul de** $\dfrac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$.

Ce quotient sera encore réalisé de façon spéciale, parce que K est fixe sur la règle.

Si *y* > *x*, on place 1C en vis-à-vis de *x* de K et le résultat se lit sur C en face de y avec Mp 0.

Si *y* < *x*, on place 10C en vis-à-vis de *x* et résultat sur C en face de *y*, mais avec Mp – 1.

Exemples :

$$\sqrt[3]{\frac{135}{3{,}5}} = 3{,}38 \qquad \sqrt[3]{\frac{255}{14}} = 2{,}63 \qquad \sqrt[3]{\frac{4{,}5}{75}} = 0{,}392 \qquad \sqrt[3]{\frac{38}{54}} = 0{,}89$$

Le lecteur pourra vérifier qu'il peut également adopter la manipulation suivante:

Placer toujours 1 C en face du plus petit des facteurs (réduits). S'il s'agit de *x*, lire le résultat sur C comme déjà dit, mais s'il s'agit de *y*, le lire sur CI (donc Mp - 1). Pour les nombres quelconques, appliquer la loi du quotient aux Ct des radicaux.

Exercice n° 17

Calculer la racine cubique des quotients :

a) $\frac{48000}{0{,}007}$ b) $\frac{0{,}014}{365}$ c) $\frac{6500}{0{,}0275}$ d) $\frac{225000}{78}$

3.4 – Opérations combinées avec CI.

Grâce à la combinaison de K avec CI, on peut calculer :

$$\frac{1}{x^3} = \left(\frac{1}{x}\right)^3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{x}} .$$

Nous nous contenterons d'indiquer les modalités de ces calculs faciles à comprendre.

►**1°** En plaçant *x* sur CI, on lira en vis-à-vis sur K, $\frac{1}{x^3}$ avec les Mp suivants, dans l'ordre : - 3 - 2 - 1.

►**2°** En plaçant *x* réduit (1 à 1000) sur K, on lira $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ sur CI avec Mp -1.

Pour les nombres quelconques ajouter le Ct, changé de signe du cube ou du radical.

Exemples :

$$\frac{1}{0{,}38^3} = 18{,}2 \qquad (+\ 1 \times 3) - 2 = +\ 1$$

$$\frac{1}{16^3} = 0{,}000245 \qquad (-\ 1 \times 3) - 1 = -\ 4$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{6500}} = 0{,}0536 \qquad -\ 1 - 1 = -\ 2$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}053}} = 2{,}66 \qquad +\ 1 - 1 = 0$$

Exercice n° 18

a) $\frac{1}{28{,}5^3}$ b) $\frac{1}{0{,}45^3}$ c) $\frac{1}{0{,}75^3}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{34{,}5}}$ e) $\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}63}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[3]{17400}}$

4. Opérations combinées avec AB.

On se doute que la correspondance directe entre K et A permet le calcul d'une expression particulière. Bien qu'elle ne soit pas fréquente, nous allons en énoncer la loi, déduite de l'application successive de celle d'un radical, puis d'une puissance (ordre 2 ou 3).

4.1. - Calcul de $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}}$.

L'exposant 2/3 se rencontre dans quelques formules d'électricité et de mécanique. La première écriture de l'expression nous indique que :

►**1°** Le Ct du résultat, pour un nombre quelconque est égal à deux fois celui du radical obtenu lui-même par un décalage de la virgule, par tranches de 3 chiffres.

►**2°** Le nombre réduit *x* sera placé sur K et le résultat lu sur A, avec les règles habituelles de ces deux échelles (Mp).

Exemples : $43600^{\frac{2}{3}} = 1240$ (1 x 2) + 1 = + 3

$0{,}007^{\frac{2}{3}} = 0{,}0366$ (-1 x 2) + 0 = - 2

4.2. - Calcul de $\left(\sqrt[2]{x}\right)^3 = x^{\frac{3}{2}}$.

Pour ce calcul inverse du précédent,,il suffit de dire que :

►**1°** Le Ct du résultat est égal à 3 fois celui du radical obtenu, lui-même, par décalage de la virgule (tranche de 2 chiffres).

►2° En plaçant *x* sur A, le résultat est lu sur. K.

Exemples : $750^{\frac{3}{2}} = 206000$ (1 x 3) + 1 = 4

$0{,}53^{\frac{3}{2}} = 0{,}386$ (-1 x 3) + 2 = - 1

Exercice no 19

Calculer les puissances :

$\frac{2}{3}$ de : a) 3 450 b) 725 000 c) 0,028 d) 0,000 18

$\frac{3}{2}$ de : e) 28,4 f) 158 g) 0,64 h) 0,037

CHAPITRE 7

QUELQUES CALCULS PARTICULIERS

Nous avons groupé dans ce chapitre certains calculs particuliers, assez souvent rencontrés dans la pratique, et dont la solution simple est obtenue grâce, à l'échelle, des inverses, et à un procédé qui est le même pour tous les cas étudiés. Nous indiquerons pour chaque calcul les Mp de lecture du résultat, mais ne parlerons pas des Ct relatifs aux nombres quelconques, qui eux découleront de la simple application des lois déjà acquises.

PREMIER GROUPE

CALCULS EFFECTUÉS AVEC L'ÉCHELLE INVERSE DES NOMBRES

1. Calcul d'expression générale : $xy^p = n$ (constante).

Lorsque deux grandeurs sont liées entre elles par une telle expression, on a souvent besoin de calculer toutes les valeurs *x* et y satisfaisant cette relation, afin de dresser un tableau de correspondance, ou encore de tracer la courbe $y = f(x)$. C'est même quelquefois un réseau de courbes que l'on établit quand la constante *n* peut avoir plusieurs valeurs n_1, n_2, n_3, etc. Ce travail préparatoire est grandement facilité par la règle, comme on va le voir.

►1.1. - $p = 1$ d'où $xy = n$.

Ce premier problème a été traité au § 5 du chapitre 6, au sujet de la conversion des fréquences en longueurs d'onde. Rappelons que grâce au produit effectué avec CI et D, il suffit de placer 1CI (ou 10 CI) sur la valeur *n* de D pour obtenir les *x* et *y* sur CI et D.

Un cas particulier est à signaler : si $y = x$ on a $x = \sqrt{n}$.

La réglette étant disposée comme ci-dessus, on peut trouver *x* en déplaçant le Tc le long des échelles CI et D jusqu'à ce qu'on lise le même nombre sur ces deux échelles ; ce sera la racine carrée du nombre *n*.

Nous conseillons au lecteur de s'entraîner à faire cette lecture spéciale d'un même nombre sur deux échelles, car ce procédé sera utilisé maintes fois ci-après. Qu'il calcule donc ainsi quelques racines carrées, en se contrôlant grâce à B (calcul direct).

►1.2. - $p = \frac{1}{2}$ d'où $x\sqrt{y} = n$.

Nous avons étudié ce produit avec B et D, mais ici nous allons encore utiliser CI et A pour trouver le produit sur D. En effet, le produit est bien obtenu en plaçant *x* sur CI face à *y* de A et il est lu sous 1 CI (Mp 0) ou 10 CI (Mp + 1), ce qui permet de dire que nous placerons 1CI sur *n* de D (*n*, 1 à 10) ou 10CI (*n*, 10 à 100) pour obtenir la correspondance de *x* sur CI avec *y* sur A.

Exemples :

$$n = 7{,}2 \quad \begin{cases} x = 4{,}75 & 3{,}36 & 2{,}08 & 1{,}20 \\ y = 2{,}3 & 4{,}6 & 12 & 36 \end{cases}$$

$$n = 28 \quad \begin{cases} x = 9{,}2 & 5{,}9 & 3{,}9 & 2{,}9 \\ y = 9{,}25 & 22{,}5 & 51{,}5 & 91 \end{cases}$$

►1.3. - $p = \frac{1}{3}$ d'où $x\sqrt[3]{y} = n$.

Cette expression ne diffère de la précédente que par l'indice du radical. Le procédé sera donc le même en remplaçant A par K pour placer *y*.

Exemples : $n = 4{,}5 \quad \begin{cases} x = 3{,}09 \quad 2{,}19 \quad 1{,}27 \\ y = 3{,}1 \quad 8{,}7 \quad 44{,}5 \end{cases}$

$n = 23 \quad \begin{cases} x = 8{,}2 \quad 4{,}25 \quad 2{,}5 \\ y = 22 \quad 158 \quad 780 \end{cases}$

►1.4. - $p = 2$ d'où $xy^2 = n$.

Ce calcul déjà étudié s'effectuait avec B1 et D pour lecture du résultat sur A. Maintenant nous prendrons CI pour les *y*, puis A1 pour les *x* et A pour le résultat. D'où en sens inverse placer 1CI sur *n* (1 à 100) de A, ou 10CI sur *n* (100 à 1000) de A1 et lire *x* sur A et *y* sur CI.

L'exemple pour ce calcul sera tiré de la technique électronique grâce au problème suivant :

Quels sont les courants supportés par différentes résistances dont la puissance de dissipation est la même, soit 3 watts ?

Nous avons $P = RI^2 = 3$.

En amenant 10CI sous 3 de A1, nous trouvons :

sur A :	*R* =	400	700	1 200	2500	5 000	ohms
sur CI:	*I* =	86,6	65.,5	50	34,7	24,5	mA

Pour les valeurs $R < 300$ il faut placer 1CI sous 3 de A2 ce qui donnera :

$R = 35$ $I = 293$ et $R = 180$ $I = 129$, etc...

La place des virgules est toujours obtenue par le jeu habituel des Ct.

Cas particulier. - En posant $y = x$, l'expression devient $x^3 = n$ d'où $x = \sqrt[3]{n}$. Nous avons donc un moyen de calculer la racine cubique d'un nombre avec plus de précision que par K. Pour *n* de 1 à 100, c'est 1CI que l'on placera en face de *n* (A), et pour *n* de 100 à 1000, c'est 10 CI que l'on amènera sous *n* de A1. On fera ensuite glisser le Tc jusqu'à ce qu'un .même nombre soit. lu à la fois sur A1 et sur C1, c'est alors la racine recherchée. S'exercer à cette méthode en contrôlant le résultat par calcul direct sur K.

►1.5. - $p = 3$ d'où $xy^3 = n$

On a ici une expression de même structure que la précédente à l'exposant près, qui est 3, au lieu de. 2. Nous concluons qu'il suffit de remplacer A par K pour obtenir le procédé.

Pour *n* de 1 à 1000, le placer sur Kavec 1CI en vis-à-vis. Pour *n* de 1000 à 10 000 ce sera sur K1 avec 10CI. On a ainsi *x* sur K1 et *y* toujours sur CI.

En posant $y = x$ on pourrait calculer une racine quatrième mais pour celle-ci nous donnons plus loin une autre méthode plus précise, donc bien préférable.

2. Calcul de $\frac{1}{x^4}$

Le calcul de, cet inverse ne peut se faire directement comme celui d'un carré ou d'un cube, cependant on peut l'obtenir d'un seul coup de règle. Effectuons pour. cela le calcul de la puissance 4, non avec C et D comme déjà vu, mais avec CI et D. Autrement.dit, posons le produit *x.x* avec ces, échelles et lisons son carré pomme d'habitude avec Mp 0 et + 1 (1CI) et + 2 + 3 (10CI). Soit par exemple $x = 2{,}7$ on trouve $x^4 = 53{,}1$, mais aussi son inverse sous 1A à lire sur B1 soit 0,018 8 car les Mp de lecture sont : avec 1A sur B2 : - 1, sur B1 : - 2.
avec 100A sur B2 : - 3, sur B1 : - 4.

Pour un nombre quelconque on ajoutera évidemment : 4 Ct de *x*.

Exemples : $x = 0{,}45 \quad \frac{1}{x^4} = 24{,}4$ (+ 1 x 4) – 3 = + 1

En résumé $\frac{1}{x^4}$ se calcule en posant le produit *x.x* avec CI et D et le résultat se lit sur B avec les Mp suivants dans l'ordre : - 2 - 1 avec 1A et - 4 - 3 avec 100 A. On remarquera que les deux premiers Mp sont ceux de $\frac{1}{x^2}$ lu sur A, ce qui s'explique facilement.

Il est utile de donner ici le moyen mnémonique propre à retrouver aisement les Mp de lecture pour l'inverse du carré, du cube ou de la puissance 4 d'un nombre.

1° Il y a autant de cas,de lecture que d'unités à l'exposant du nombre.

2° Le Mp de l'inverse est toujours négatif et au plus égal en valeur absolue à celle de l'exposant. Ceci nous indique que l'on a bien :

- 1 et - 2 pour $\frac{1}{x^2}$; - 1 - 2 et – 3 pour $\frac{1}{x^3}$ et

-1, - 2, - 3 et - 4 pour $\frac{1}{x^4}$ ce qui, finalement, est assez simple pour être retenu.

3. Racine quatrième d'un nombre.

C'est en reprenant le calcul de x^4 avec CI et D, exposé ci-dessus, mais. cette fois à reculons que nous pouvons obtenir la racine quatrième d'un nombre. Nous placerons 1CI sous le nombre donné (de 1 à 100) de A, et 10,CI (100 à 10 000). Ensuite on cherchera, comme déjà vu, à trouver le même, nombre à lire sur CI et D, ce sera la racine (lecture directe).

Pour les nombres quelconques, nous lesréduirons en décalant la virgule par tranches de 4 chiffres et le Ct du radical sera égal au nombre de tranches, positif pour la gauche, négatif pour la droite.

Exemples :

$\sqrt[4]{26} = 2{,}26$ $\sqrt[4]{174} = 3{,}63$ $\sqrt[4]{0{,}345} = 0{,}766$

Pour le troisième nombre un décalage à droite donne le nombre réduit 3 450 à placer sur A2 avec 10 CI et Ct - 1 pour la racine.

4. Racine sixième d'un nombre.

On passe facilement de la racine quatrième à la sixième, en remplaçant dans le calcul précédent A par K, d'où pratiquement:

Placer 1CI sous le nombre donné (1 à 1000) de K ou 10CI (10^3 à 10^6). La racine est le nombre commun à CI et D, en lecture directe. Un nombre quelconque sera réduit par décalage de la virgule avec des tranches de 6 chiffres, ce qui déterminera le Ct du radical comme d'habitude.

Exemples :

$\sqrt[6]{42{,}5} = 1{,}868$ $\sqrt[6]{3750} = 3{,}94$ $\sqrt[6]{0{,}186} = 0{,}756$

Pour le troisième nombre, un décalage à droite donne le nombre réduit 186 000 à placer sur K3 avec 10CI et Ct - 1 pour la racine.

5. Équations du 3^e et 4^e degré.

Nous allons maintenant montrer comment la règle à calcul, outil vraiment remarquable, permet une résolution directe de certaines équations du troisième et quatrième degré. Commençons par la première de forme générale :

$mx^3 \pm nx^2 \pm p = 0$. Cette équation peut toujours se ramener à la suivante : $x^3 \pm ax \pm b = 0$, que nous allons écrire sous la forme d'expression de calcul $x^2 (x \pm a) = \pm b$. On voit que celle-ci est d'un genre déjà étudié soit $x^2 y = n$ où y a une valeur toute particulière : $y = x \pm a$. Voyons comment le calcul déjà connu de cette expression va nous conduire à la racine de l'équation donnée.

Tout d'abord nous considérerons comme calcul type celui de x^2 (x - a) = b, tous les autres pouvant se ramener à lui. En effet, pour x^2 (x + a) = b, nous aurons le même procédé, le signe de a ne changeant rien, à une petite nuance près que nous indiquerons in fine. Pour x^2 (x - a) = b nous avons deux racines négatives qui seront solutions des calculs x^2 (x + a) = b et x^2 (x - a) = b obtenus par changement des signes. Enfin, pour x^2 (x + a) = - b, une seule racine négative, solution de x^2 (x - a) = b .

Exposons la méthode de calcul avec l'exemple suivant :
x^2 (x – 2,75) = 270.

Précisons en premier que a et x sont supposés compris entre1et 10. Dans le cas contraire un changement de variable peut toujours nous ramener à cette hypothèse. Ainsi avec x^2 (x - 34) = b -nous poserons x = 10 z pour obtenir :

$$z^2 (z - 3{,}4) = \frac{b}{1000}.$$

Plaçons, pour résoudre x^2y = 270, 10CI sur 2,7 de A1 (puisque 3 chiffres), la racine cherchée correspondra à la possibilité de lire x sur CI quand, en vis-à-vis, on pourra lire (x - 2,75) sur A1. La méthode est donc semblable à celle de la racine cubique, mais ce n'est plus le même nombre qui se lit à la fois sur les deux échelles CI et A1.

Certes, c'est là une petite difficulté, que nous résoudrons ainsi. Prenons pour x plusieurs valeurs rondes successives et comparons (x -2,75) avec la valeur y donnée par la règle pour x. Nous pouvons dire que la racine sera entre les deux valeurs de x pour lesquelles la différence y - (x - 2,75) change de signe :

Soit	x = 6,75	(x - 2,75) = 4	y = 5,9
	= 7,75	= 5	= 4,5
	= 8,75	= 6	= 3,5

Ici x est entre 6,75 et 7,75. Nous allons resserrer l'intervalle comprenant la racine en prenant la valeur moyenne, soit

$x = 7,25$ $(x - 2,75)$ 4,5 $y = 5,14$.

Continuons avec $x = 7,50$, moyenne de 7,25 et 7,75.

On a : $(x - 2,75) = 4,75$, $y = 4,81$, ces deux valeurs voisines nous montrent que x est proche de 7,50. Essayons à nouveau :

$x = 7,525$ $(x - 2,75) = 4,775$ et $y = 4,775$

Le trait du curseur est bien à la fois sur 7,525 de CI et 4,775 de A1, à la précision de lecture près. La racine cherchée est donc $x = 7,525$; le chiffre des millièmes n'étant évidemment qu'approché. Ce résultat est cependant remarquable et obtenu sans grande difficulté, car les approches successives sont plus vite faites en réalité qu'elles ne sont exposées ci-dessus, dès qu'on en a saisi le principe, d'ailleurs fort simple.

A titre d'exercice résoudre les deux autres équations $x^2(x - 2,75) = 27$ et $x^2 (x - 2,75) = 2,7$ d'ont les termes b seront placés en A2, puis A1 avec 1CI. On s'apercevra que pour cette dernière manipulation on aboutit à une lecture hors règle de x.

Celle-ci se lèvera par la méthode habituelle du changement d'index en plaçant 1 CI sur 2,7 de A2. Les Mp de A deviennent de ce fait - 1 et 0. On peut lire la solution x qui correspond évidemment à $(x - 2,75) < 1$ d'où sa lecture sur A1.

►*Solutions* : $x = 4,245$ et $x = 3,042$.

Dans le calcul de forme $x^2 (x + a) = b$, on a aussi un cas de lecture hors règle, mais plus simple qui correspond à $x + a > 10$. Dans ce cas, en effet, nous disposons de A2 où $x + a$ est lisible puisqu'en fait cette échelle va de 10 à 100. Il n'est donc pas besoin de changer d'index.

Vérifier ce fait avec $x^2 (x + 8) = 325$, dont la racine est un chiffre rond.

Après avoir parfaitement compris la résolution de ces équations du 3^e^ degré, on pourra passer à celles du 4^e^ degré de forme condensée, générale : x^3 ($x \pm a$) b qui ne diffèrent des précédentes que par le cube de x au lieu du carré. Ceci Implique que le procédé de résolution sera identique au précédent en opérant cette fois avec K et CI. C'est 1CI que l'on placera en vis-à-vis de b (1 à 1000) sur K, ou 10 CI sous b de K1 (1000 à 10 000). x sera lu sur CI et $x \pm a$ sur K1. Une lecture hors règle,de x conduira encore à changer d'échelle pour la pose de b.

Exercices :

Résoudre x^3 (x - 3,39) = 300 et x^3 (x - 45) = 4 275 000.

La deuxième équation nécessite un changement de variable et aussi d'échelle.

► *Solutions* : 1° x = + 5,35 x = - 3,515
2° x = + 62,5 x = - 37,3

En conclusion de ces cinq paragraphes, on peut dire que l'emploi de CI avec des échelles D, A ou K permet des calculs commodes, d'expressions fort courantes. Ajoutons que pour le calcul de xy^2 et xy^3 le lecteur pourra préférer d'employer CI et A (ou K) qui remplace le cas de lecture hors règle, par une lecture avec 10 CI, ce qui peut être jugé plus agréable.

DEUXIÈME GROUPE

CALCULS EFFECTUÉS AVEC L'ÉCHELLE INVERSE DES CARRÉS

Il est évident qu'une telle échelle n'existe sur aucune règle, cependant il est possible d'en obtenir une placée sur la réglette, de la manière suivante. Sortir la réglette de la règle puis la retourner dans son plan de 180° et la remettre dans ses glissières. Une bonne règle permet toujours cette opération sans inconvénient. Ceci fait, nous obtenons : dabord, C devient CI, ce qui peut rendre service au possesseur d'une règle MANNHEIM qui ne possède pas d'échelle d'inverse.

Il pourra ainsi faire le calcul de *xy* avec CI et D mais. également celui de la racine cubique avec CI et A qui présentent l'avantage d'être côte à côte, en évitant les erreurs d'alignement dans la lecture de coïncidence du résultat. Ensuite l'échelle B devient une échelle des inverses des carrés, que nous désignerons donc par BI.

Avec celle-ci et D on peut effectuer le produit $x\sqrt{y}$ très commodément ainsi que le quotient $\frac{x}{\sqrt{y}}$. Pour les deux échelles retournées, on a bien sûr, un léger inconvénient; c'est d'avoîr les chiffres gravés à l'envers, mais on s'y fait très vite. Voyons maintenant l'avantage primordial que nous procure l'échelle BI ainsi obtenue.

Calcul de la racine cinquième.

Nous avons indiqué comment on pouvait calculer directe ment les racines quatrième et sixième d'un nombre grâce à CI et A (ou K). Mais si on a oublié le procédé à employer, on peut s'en tirer par une double extraction de racines puisque $\sqrt[4]{x} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{x}}$ et $\sqrt[6]{x} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{x}}$ et que l'emploi de A et K pour ces radicaux est immédiat. Pour une racine cinquième il ne peut en être ainsi et il sera nécessaire de recourir à la méthode suivante assez exceptionnelle, bien qu'elle soit inspirée de celles applicables aux autres racines. Commençons par indiquer que la réduction d'un nombre quelconque, se fera comme d'habitude, par un décalage de la virgule, appliqué à des tranches de cinq chiffres, ce qui nous fournira le Ct du radical. Le problème se ramène donc à extraire la racine cinquième d'un nombre compris entre 1 et 100 000. Considérons la puissance 5 de x ; nous pouvons écrire $x^5 = x^2 . x^3$. Nous allons effectuer ce produit sur A en se servant de A et BI.

Soit en effet x = 1,6. Plaçons le Tc sur cette division de D (*fig. 35*). Nous pouvons lire : x^2 = 2,56 sur A1 et x^3= 4,1 sur K.

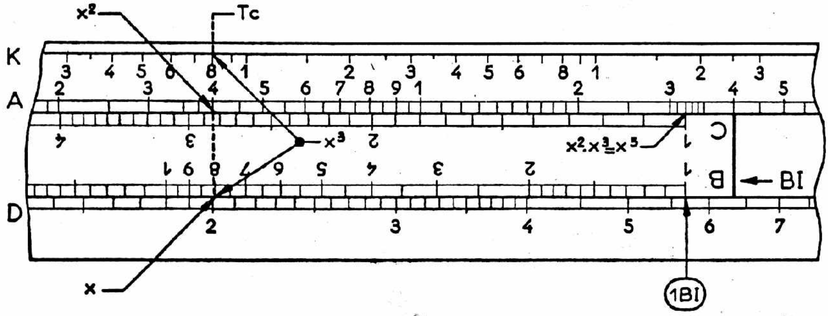

FIG. 35.

Amenons sous le Tc la division 4,1 de l'échelle BI 1 (section de droite puisque l'échelle est retournée et que 1BI est à l'extrémité droite de la réglette). Le produit x^2. x^3 est ainsi réalisé et se lit sur A2 (Mp + 1) soit 10,5 en face de 1BI (ou 1C).

Jusqu'ici le processus est identique à celui du cube calculé avec CI et D. Mais en le prenant à reculons nous aurons une petite différence avec ce que nous avons trouvé pour la racine cubique. En effet, pour chercher la racine cinquième, nous plaçons 1BI sous 10,5 de A2 (comme 1CI) et nous constatons que la racine (soit. 1,6) est obtenue quand nous pouvons lire un même chiffre à la fois sur BI et sur K, ici 4,1. Cette fois donc, nous cherchons bien encore une coïncidence, mais le chiffre commun aux deux échelles n'est pas la racine (mais son cube), et celle-ci se lit, par conséquent, sous le Tc mais sur D. Un seul déplacement du Tc est donc nécessaire malgré cette différence de lecture pour la racine, cette dernière étant toujours directe (Mp 0).

Pour les différents cas de lecture, que nous allons examiner maintenant, nous aurons encore une particularité, due au fait que l'échelle K est graduée de 1 à 1000 alors que BI ne l'est que de 1 à 100.

1er et 2e cas. - *x*. compris entre 1 et 100.

Le nombre donné est posé avec 1BI sur A1 ou A2. Procéder comme expliqué ci-dessus.

Exemples : $\sqrt[5]{5{,}9} = 1{,}426$ (avec 2,9 sur BI et K)
$\sqrt[5]{73} = 2{,}37$ (avec 13,1 sur BI et K).

3e cas. - *x* compris entre 100 et 1000.

x est placé sur A1 mais avec 100BI (identique à racine cubique).

Exemple: $\sqrt[5]{265} = 3{,}05$ (avec 28,4 sur BI et K)

4e cas. - *x* compris entre 1000 et 10 000.

x est placé sur A2 avec encore 100BI.

Exemple: $\sqrt[5]{1740} = 4{,}44$ (avec 88 sur BI et K).

Mais si nous avons *x* = 4350, nous constatons une impossibilité de lecture, car le chiffre de coïncidence est supérieur à 100 et dépasse la possibilité de BI. Celle-ci a sa limite donnée par *x* = 2 153 qui correspond comme on peut le vérifier à. 100BI en alignement avec 100K.

Ce nombre frontière est d'ailleurs assez curieux car on peut noter que

$$\sqrt[5]{2153} = \sqrt[3]{100} = \sqrt[2]{21{,}53} = 4{,}641$$

Nous sommes en conséquence, pour *x* compris entre 2 153 et 10 000, obligés de changer d'index et de reprendre 1BI en considérant BI1 comme graduée de 100 à 1000.

Exemple : $\sqrt[5]{4350} = 5{,}34$ (avec 152,3 sur BI et K)

5e cas. - *x* compris entre 10 000 et 100 000.

Le nombre est placé sur A1 mais nous reprenons 100BI et c'est encore BI1 qui est considérée comme lue de 100 à 1000.

Exemple : $\sqrt[5]{67500} = 9{,}25$ (avec 810 sur BI et K)

Bien qu'une racine cinquième soit d'une rencontre peu fréquente, il faut admettre que la règle est vraiment précieuse pour son calcul qui sans elle, ne peut être effectué qu'avec les logarithmes, mais guère plus rapidement.

Maintenant qu'avec ce dernier calcul nous en avons terminé avec toutes les possibilités d'une règle, pour les extractions de racine, de la deuxième à la sixième sans exception, il est bon pour le lecteur de lui donner une vue d'ensemble de la question qui montrera la parfaite homogénéité qui réside dans tous les procédés de calculs étudiés et lui donnera des moyens simples pour ne jamais les oublier.

Règles mnémoniques. Extraction des racines.

1° Réduction du nombre donné.

Pour la recherche d'une racine quelconque, il faut toujours, et en premier lieu,, réduire le nombre donné, avant de le placer sur la règle. La réduction s'opère, dans tous les cas d'après une seule, et même loi pratique, que voici:

►- le nombre réduit doit comporter, au maximum, autant de chiffres que d'unités à l'indice du radical

►- la réduction se fait en décalant la virgule, à gauche ou à droite d'un certain nombre de tranches, comprenant chacune autant de chiffres que d'unités à l'indice;

►- le Ct de la racine sera égal au nombre de tranches nécessaires à la réduction ; il est positif pour décalage à gauche et négatif pour la droite;

►- le Ct de la racine est toujours aussi, égal au quotient du Ct (caractéristique) du nombre donné par l'indice du radical, mais cette opération est peu commode, quand le Ct est négatif ; on lui préférera le décalage de la virgule bien plus pratique et plus sûr.

2° Lecture du nombre réduit sur la règle.

Les racines troisième, quatrième et cinquième peuvent toutes trois, se calculer en plaçant le nombre réduit sur l'échelle des carrés A. Plus précisément, les nombres comportant un nombre **IMPAIR** de chiffres seront placés sur A1 et ceux ayant un nombre **PAIR** sur A2.

Pour les racines troisième et sixième, on place toujours les nombres de deux chiffres sur K1, ceux de 2, sur K2, ceux de 3, sur K3. Pour la sixième seulement, ceux de 4, 5 ou 6 chiffres sur Kl, K2 ou K3 dans l'ordre.

3° Manoeuvre de la réglette.

Pour les racines troisième, quatrième et cinquième c'est toujours l'index (CI ou BI) que l'on place sous le nombre posé, quand celui-ci a : 1, 2 ou 5 chiffres (nombre de 1 à 100 puis de 10 000 à 100 000). De même c'est l'index 10CI (ou 100BI) que l'on utilise pour les nombres de 3 ou 4 chiffres (100 à 10 000) à l'exception du cas spécial de la racine cinquième nombres de 2 153 à 10 000 (avec 1BI).

Pour la racine troisième, le Tc suffit à son calcul.

Pour la sixième, 1 CI servira pour les nombres de 1 à 3 chiffres, et 10 CI pour ceux de 4 à 6 chiffres.

4° Lecture du résultat.

La réglette étant placée comme indiqué, on recherche la coïncidence d'un même nombre sur deux échelles, savoir:

►- CI et D pour racines quatrième et sixième (aussi deuxième),
►- CI et A1 pour racine troisième,
►- BI et K pour racine cinquième.

La racine cherchée est toujours lue sur D en vraie grandeur à l'aide du Tc placé sur le nombre précédent.

5° Aide-mémoire.

S'il arrivait qu'on ait, oublié la manceuvre de la règle pour une racine quelconque, on pourrait facilement la reconstituer en s'appuyant sur les puissances de 2 soit 4, 8, 16, 32, 64, faciles à retenir. En cherchant comment la racine (2) se présente sur D on trouve la coïncidence réalisée sur les échelles (nombre 2 ou 8). Retenons que tous les nombres ci-dessus, sauf 64 sont à poser sur A.

CHAPITRE 8

RÉSOLUTION DU TRIANGLE RECTANGLE

Résoudre un triangle rectangle, c'est calculer l'un de ses côtés connaissant les deux autres. La formule classique qui permet ce calcul est évidemment la relation de Pythagore: $a^2 = b^2 + c^2$. On peut ainsi avec l'échelle des carrés calculer *a* si *b* et *c* sont donnés. Cependant, cela nécessite deux lectures pour les carrés des côtés, puis une addition, enfin une extraction de racine. Or, on peut faire autrement et mieux avec la règle, grâce à un procédé, assez curieux, de calcul direct qui ne demande qu'un seul déplacement de la réglette. Nous allons le montrer pour les deux problèmes possibles : calcul de l'hypoténuse du triangle, ou celui d'un côté de l'angle droit.

1

Les données sont alors *b* et *c*, avec par hypothèse *b* > *c*. Il s'agit de calculer *a*. Nous pouvons écrire, en partant de la formule ci-dessus :

$$a^2 = b^2 + c^2 = c^2\left(\frac{b^2}{c^2} + 1\right) \qquad \text{d'où} \qquad a = c\sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}$$

que nous écrirons encore, en posant : $\frac{b}{c} = x,\quad a = c\sqrt{x^2 + 1}$

Nous avons obtenu ainsi, une formule de calcul direct, dont nous allons étudier le procédé pour les différents cas, déterminés par la grandeur relative des données *b* et *c*.

1er cas : $1 < x < 10$ avec $1 < c < 10$ et $1 < b < 10$.

On remarque que pour ce 1er cas, les limites assignées aux trois quantités, sont celles de l'échelle des nombres d'où va partir le calcul. En effet, plaçons la valeur *c* de l'échelle C au-dessus de 1D (*fig. 36*), puis le Tc sur la valeur *b* de C. Nous

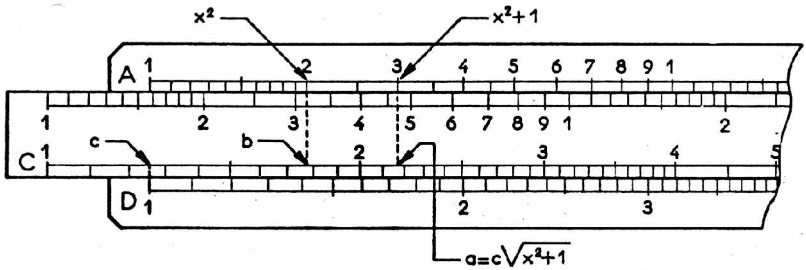

FIG. 36.

obtenons sur D et sous le Tc la valeur de $x = \frac{b}{c}$, car $\frac{1}{c}$ peut se lire sous 10C, et la réglette est disposée de façon à effectuer par cet index le produit par *b*, d'où *b* x $\frac{1}{c}$. - Il s'ensuit que x^2 peut se lire sur A grâce au Tc. A cette valeur lue, ajoutons 1 pour obtenir $x^2 + 1$, que nous allons placer sur A avec le Tc, en tenant compte des Mp de lecture de cette échelle (0 et + 1). Nous constatons alors que le radical $\sqrt{x^2+1}$ se lit sur D sous le Tc mais aussi que la réglette, telle qu'elle a été placée initialement réalise le produit de ce radical par *c* dont on peut lire la valeur sur C, soit donc $c\sqrt{x^2+1}$ c'est à dire *a*, l'hypoténuse cherchée.

Remarquons que le produit est ici effectué avec une inversion du rôle habituel des échelles C et D.

Appliquons la dite méthode aux deux exemples suivants que nous expliquerons en détail:

Exemple 1 : $b = 4$, $c = 3$.

Amenons 3 de C sur 1D puis le Tc sur 4 de C.

Nous lisons x = 1,33 sur D mais cette lecture est en pratique inutile, car c'est x^2 = 1,78 sur A1 qui nous sert au calcul.

On a donc $x^2 + 1 = 2{,}78$ et en plaçant le Tc sur ce chiffre de A1, nous obtenons sur, C : $a = 5$ (la lecture du radical est également inutile). Indiquons, tout de suite, que ces trois chiffres 3, 4 et 5 peuvent servir de moyen mnémonique pour retrouver le processus du calcul.

Exemple 2 : $b = 9$, $c = 1{,}7$.

En plaçant c et b comme ci-dessus, on lit directement $x^2 = 28$ car cette fois la lecture se fait sur A2 (Mp + 1).

En plaçant $x^2 + 1 = 29$ sur A2 également, on obtient $a = 9{,}15$.

2^e cas : $1 < x < 10$ avec $1 < c < 10$ et $10 < b < 10c$.

Nous avons maintenant $b > 10$; pour le placer, il nous faut le réduire en le divisant par 10, mais il faut aussi changer d'index d'où :

Placer c sur 10D et b réduit sur C avec le Tc (*fig.37*). Ainsi

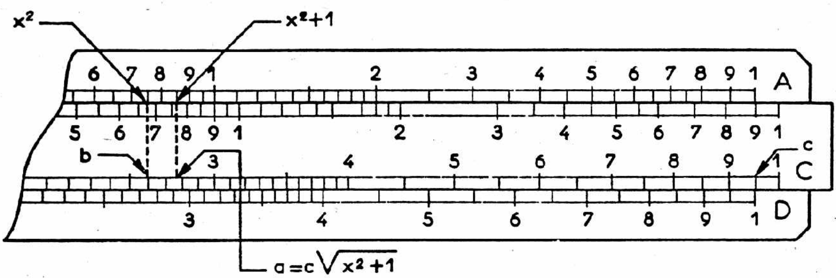

FIG. 37.

disposée la réglette réalise l'opération suivante $\frac{10}{c} \times \frac{b}{10} = bc$.

On trouve donc encore sur D, le quotient x en vraie grandeur. La suite du calcul sera la même que pour le 1^er cas.

Exemple 3 : $b = 16$, $c = 8$.

Placer 8 de C sur 10D et le Tc sur 1,6 de C d'où $x^2 = 4$; $x^2 + 1 = 5$ et. $a = 17,9$. En effet dans la formule de calcul $c\sqrt{x^2+1}$, on doit tenir compte du Mp (10 D) qui est + 1. Le Ct de réduction de *b* est donc applicable à *a*.

Exemple 4 : b = 30, c = 5.

On lit maintenant $x^2 = 36$ puisque sur A2 et finalement $a = 30,4$ (toujours Mp + 1).

On remarque que ce Mp (+ 1) devient nécessaire lorsque le quotient *x* est obtenu à partir de 10D, c'est donc encore un index 10 qui est la cause du Mp, ce qui prouve que la méthode des coefficients est toujours logique, même pour ce procédé très particulier.

3e cas : x > 10 avec $1 < c < 10$ ($b > 10$ c).

Exemple 5 : Si. on essaye d'appliquer le procédé pour $b = 65$ et $c = 2,5$ en le ramenant au 1er cas par la réduction de *b* (Ct + 1), on voit que $x^2 = 676$ puisque le Ct du carré est + 2. On ne peut plus, pratiquement différencier la lecture de x^2, de celle de $x^2 + 1$, ce calcul dépassant la précision fournie par la règle.

Cependant on peut donner pour ce cas une formule de calcul plus commode et plus rapide que celle de Pythagore.

En effet si $x > 10$, on, peut écrire $\sqrt{x^2+1} = x + \frac{1}{2x}$, car en élevant ces deux termes au carré, on a : $x^2+1 = x^2+1+\frac{1}{4x^2}$ et $\frac{1}{4x^2}$ est négligeable devant $x^2 + 1$.

On a donc: $a = c\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{2b}\right) = b + \frac{c^2}{2b}$

Le deuxième terme est une expression que nous savons calculer directement.

Ainsi pour *b* = 65, *c* = 2,5, $a = 65 + \left(\frac{2{,}5^2}{130}\right) = 65{,}048$

4[e] cas : *b* et *c* nombres quelconques.

On ramènera le cas général où *b* et *c* sont quelconques à l'un des cinq exemples ci-dessus, en réduisant les deux nombres donnés à l'aide du même Ct, et celui-ci sera appliqué au résultat fourni par le calcul des nombres réduits.

Exemples :

b = 58	c = 27	(Ct + 1)	Ex. 1	a= 63,5
b = 0,85	c = 0, 14	(Ct - 1)	Ex. 2	a= 0,861
b = 1 420	c = 725	(Ct + 2)	Ex. 3	a= 1592
b = 0,45	c = 0,073	(Ct - 2)	Ex. 4	a= 0,456
b = 845	c = 37	(formule)	Ex. 5	a= 845,81

2e problème. - Calcul d'un côté de l'angle droit.

Les données sont maintenant *a* et *c*. Il s'agit de calculer *b*
Nous écrirons cette fois :

$b^2 = a^2 - c^2 = c^2\left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)$ d'où $b = c\sqrt{x^2 - 1}$ avec $x = \frac{a}{c}$.

Cette formule de calcul est comparable à la précédente, au signe négatif près, sous le radical. Nous allons encore rencontrer les deux cas principaux du premier problème mais chacun d'eux va se subdiviser en quatre ou six exemples au lieu de deux. Ceci est dû à la présence du signe-moins au radical; en effet, alors que précédemment $x^2 + 1$ ne pouvait être que supérieur à 1 nous pouvons ici avoir $x^2 - 1 < 1$ et même $x^2 - 1 < 0{,}1$ suivant la grandeur relative de *a* et *c*.

1[er] cas : 1 < *a* < 10 et 1 < *c* < 10.

► **I.** – $1 < x < \sqrt{1{,}1}$

Exemple 1 : *a* = 1,59, *c* = 1,53.

Comme pour le premier problème, nous plaçons 1,53 de C sur 1D, puis le Tc sur 1,59 de C. x^2 = 1,08 et x^2 - 1= 0,08 (*fig. 38*). Pour placer cette valeur sur A, nous sommes obligés de la

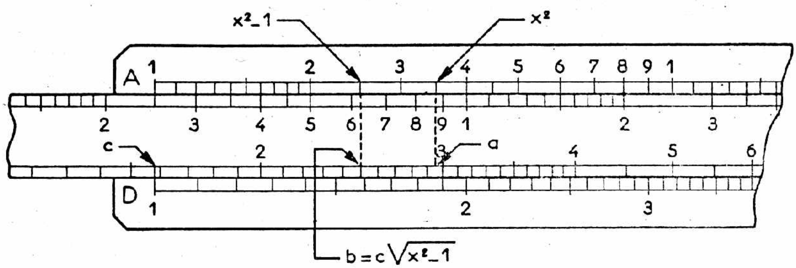

FIG. 38.

multiplier par 100 (Ct - 2), car 8 peut être lu sur A1. Mais cela entraîne pour le radical, donc, aussi pour *b*, un Ct de - 1. Le résultat lu sur D est 4,33 ce qui donne *b* = 0,433. Le processus reste donc le même mais un changement d'échelle est nécessaire pour la pose de x^2 - 1 (réduction de cette valeur).

Exemple 2 : *a* = 5,35, *c* = 5,20.

Pour ces valeurs de *a* et *c*, x^2 = 1,06 et on voit que x^2 - 1= 0,06 ne peut plus être ramené sur A1, car il tombe hors règle de C. Nous devons reposer nos nombres en changeant d'index soit 5,2 de C sur 10D ce qui redonne la possibilité de placer 6 (Ct - 2) sur A1. Lecture sur D 1,27 avec Ct - 1. Mais ici le produit (x *c*) est obtenu par 10D au lieu de 1D, on a donc un Mp + 1. Au total donc Ct = - 1 + 1 = 0, d'où finalement *b* = 1,27.

Ce résultat ne peut surprendre, car la lecture liors règle au-delà de 10C sous-entendait un nombre supérieur à 10 qui avec le Ct - 1 devenait une lecture directe.

Par ailleurs, on a en définitive, pour ces deux exemples, le même processus ; report de x^2 - 1 sur A1 avec Ct - 1 pour le résultat *b*, mais avec en plus Mp + 1 si 10D (toujours index 10) est utilisé pour obtenir la lecture finale.

► **II. -** $\sqrt{1{,}1} < x < \sqrt{2}$ **.**

Exemple 3 : Soit *a* = 1,54, *c* = 1,35.

Plaçons toujours 1,35 (C) sur 1D et le Tc sur 1,54 (C). On a x^2 = 1,3 et $x^2 - 1$ = 0,30. Il est encore nécessaire de multiplier cette valeur par 100, et 30 sera donc posé sur A2, d'où lecture de 7 37. Mais il y a encore ici Ct -1, donc *b* = 0,737.

Exemple 4 : *a* = 4,9, *c* = 5,8.

Ayant placé *c* et *a* comme d'habitude, on a -également $x^2 - 1$ = 0,40 x 100 = 40, hors règle. D'où changement d'index, en amenant 4,9 sur 10D et lecture de 3,1 avec Mp + 1 pour le produit, ce qui donne *b* = 3,1 puisque Ct = - 1 + 1 = 0. On voit que ces deux exemples se traitent comme les deux premiers, sauf que c'est A2 au lieu de A1 qui est utilisée pour la pose de $x^2 - 1$.

► **III. -** $\sqrt{2} < x < 10$.

Pour cette valeur de *x*, on retrouve intégralement le processus du premier problème, au signe moins près.

Exemple 5 : *a* =: 5, *c* = 3.

On obtient facilement x^2 = 2,78 et $x^2 - 1$ = 1,78, d'où *b* = 4.

On reconnaît bien, fait à reculons, le calcul du premier exemple du premier problème.

Exemple 6 : *a* = 6,5, *c* = 1,37.

On a ici x^2 = 22,5 sur A2, d'où $x^2 - 1$ = 21,5 et *b* = 6,35 directement.

2^e^ cas : 10< *a* <10*c* et 1< *c* <10

Pour ce deuxième cas, les particularités du premier cas se retrouvent mais sont plus simples, car la position de la réglette élimine toute possibilité de hors règle (*fig. 39*).

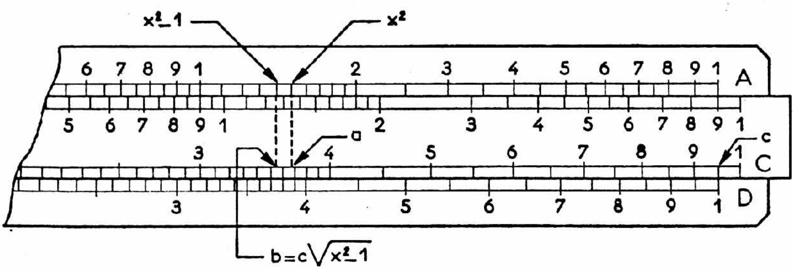

FIG. 39.

► **I. -** $1 \langle x \langle \sqrt{1{,}1}$.

Exemple 7 : a = 10,2, c = 9,85.

Le procédé sera le même que pour le deuxième cas du premier problème, savoir : réduction de a avec Ct + 1 et emploi de 10D.

On place donc 9,85 de C sur 10D et le Tc sur .1,02 de C. On s'aperçoit que pour ces valeurs exceptionnelles de a et c le carré x^2 se lit difficilement avec précision. Nous conseillons donc, éventuellement, de le faire comme suit:

$$x = \frac{10{,}2}{9{,}85} = 1 + n = 1 + \frac{0{,}35}{9{,}85} = 1 + 0{,}00355.$$

En prenant le carré de 1 + n, on est conduit à écrire

$x^2 - 1 = n \ (2+n)$). Ce calcul donne ici 0,072 2. Ce

nombre réduit avec Ct - 2 sera placé sur A1 d'où la lecture sur C de 2,65. Celle-ci est faite avec Ct - 1 (réduction) mais aussi

Mp + 1 (produit), donc b = 2,65.

► **II. -** $\sqrt{1{,}1} \langle x \langle \sqrt{2}$

Exemple 8 : a = 11,2, c = 8,75.

Plaçons 8,75 de C sur 10D et le Tc sur 1,12 de C. On obtient

$x^2 = 1{,}64$, $x^2 - 1 = 0{,}64$. Le report se fait encore sur A2, d'où Ct -1 pour le résultat, ce qui avec Mp + 1 donne encore zéro.
$b = 7$.

► **III. -** $\sqrt{2} \langle x \langle 10$

Exemple 9 : $a = 21$, $c = 7{,}6$.

En opérant toujours avec 10D on a , $x^2 - 1 = 6{,}63$, d'où lecture résultat 1,957, qui devient, avec Mp + 1, $b = 19{,}57$,

Exemple 10 : $a = 27$, $c = 3{,}8$.

Ici , $x^2 - 1 = 49{,}5$ sur A2, d'où $b = 7$.

3e cas. - $x > 10$ avec $1 < c < 10$ ($a > 10\,c$).

Ce cas dépasse à nouveau les possibilités de la règle et sera résolu par une formule approchée semblable à celle du premier problème.

Pour x > 10, on peut écrire $\sqrt{x^2 - 1} = x - \dfrac{1}{2x}$ ce qui revient encore à négliger $1/4x^2$ d'où :

$$b = c\sqrt{x^2 - 1} = c \left(x - \frac{1}{2x} \right) = c \left(\frac{a}{c} - \frac{c}{2a} \right) = a - \frac{c^2}{2a}$$

Exemple 11 : $a = 57$, $c = 1{,}55$, $b = 56{,}979$

4e cas. - Nombres quelconques.

On réduira ceux-ci comme indiqué au premier problème pour ramener le calcul à l'un des trois cas précédents. Pour conclure l'étude de ce deuxième problème, on peut convenir que le calcul est plus complexe que celui du premier, puisqu'on doit reporter $x^2 - 1$ dans six des exemples et en outre changer d'index pour deux d'entre eux. C'est pourquoi nous allons donner maintenant un autre genre de calcul bien plus agréable mais qui ne peut être envisagé que si la règle est munie d'une échelle des Cosinus, appelée quelquefois échelle de Pythagore, parce qu'elle permet justement la résolution du présent problème.

Emploi de l'échelle des cosinus

Afin de réduire la manipulation à un seul déplacement de la réglette, nous procéderons ainsi :

Indiquons d'abord que l'échelle des cos (P) fournit la valeur $\sqrt{1-x^2}$ en vis-à-vis de *x* de l'échelle D (voir chap. 11).

Afin d'utiliser cette propriété de P, nous prendrons la formule de calcul suivante :

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \text{d'où } b = a\sqrt{1-x^2} \text{ avec } x = \frac{c}{a} .$$

Plaçons *a* de C sur 10D **(1)** puis le Tc sur *c* de C. Le quotient $x = \frac{c}{a}$ peut se lire sur D, mais c'est inutile, et nous lirons de suite $\sqrt{1-x^2}$ -sur P avec le Tc.

Cette valeur est alors reportée sur D par le seul déplacement du Tc, et on obtient immédiatement le produit $a\sqrt{1-x^2}$,c'est-à-dire *b*, sur C.

Comme on sait que *x* < 1 par définition (cosinus de l'angle formé par c et a), on n'a qu'un seul cas de calcul: 0,1< *x* < 1.

Exemple : *a* = 6,3, *c* = 4,1. On trouve $\sqrt{1-x^2}$ = 0,76 (lecture directe) d'où facilement *b* = 4,78 (Ct - 1 pour le radical Mp + 1 pour le produit., total 0). Si l'on a : *x* < 0,1, c'est-à-dire $\frac{c}{a}$ < 0,1, cela revient à *a* > 10 *c*, donc au troisième cas ci-dessus, calculé par la formule $b = a - \frac{c^2}{2a}$.

Ajoutons que, pour des nombres quelconques, aucune réduction n'est nécessaire, autre que celles habituelles des nombres pour la pose de *a* et *c*.

(1) Ou 1 D si a > 10 - produit hors règle possible sauf avec règle double face (b > 10).

CHAPITRE 9

EMPLOI DE L'ÉCHELLE DES LOGARITHMES

1. Logarithme d'un nombre.

Nous avons dit au chapitre 2 (généralités) qu'un logarithme décimal se composait de deux parties: l'une devant la virgule appelée caractéristique, (positive ou négative), l'autre après la virgule appelée mantisse (toujours positive).

Le simple examen du nombre donné permet de déterminer la caractéristique; tandis que pour connaître la mantisse il faut consulter une table de logarithmes. Larègle à calcul, grâce à son échelle L, constitue justement une telle table pouvant donner une mantisse à trois décimales. Celle-ci est obtenue par correspondance avec l'échelle des nombres (C ou D). Avec la règle Mannheim, on trouvait L sur le verso de la réglette et la correspondance se faisait en plaçant 1C sur le nombre *x* de D, puis en retournant la règle, on pouvait lire la mantisse grâce à une encoche portant un trait servant d'index (*fig. 40*).

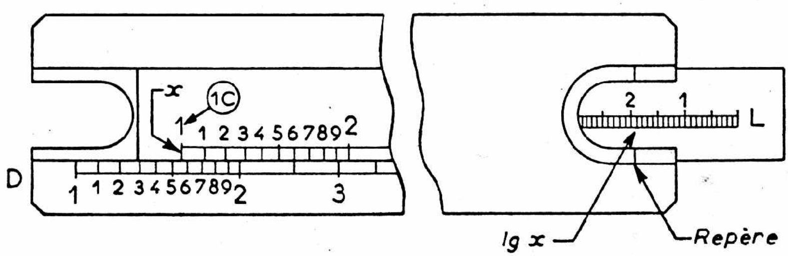

Fig. 40.

Avec la règle de RIETZ, la lecture est facilitée du fait que L est sur la face même des échelles C et D et qu'il suffit de se servir du curseur. On peut dire que pratiquement, L donne les trois décimales du logarithme des nombres de 1 à 10. C'est ainsi qu'on lira

x = 1,7	2,4	3,75	6,25,	etc ...
lg x = 0,230	0,380	0,574	0,796,	etc ...

Pour un nombre quelconque, il suffit d'inscrire le Ct devant la virgule (à la place du zéro) avec son signe négatif au-dessus, s'il y a lieu.

Exemples : lg 285 = 2,454 lg 0,38 = $\bar{1},580$

lg 4 250 = 3,628 lg 0,067 = $\bar{2},826$

Cette échelle peut nous servir, le cas échéant, à résoudre certains calculs passibles des logarithmes.

Exemple : Soit 27x = 5 250, on peut écrire :

x lg 27 = lg 5250, d'où $x = \dfrac{\lg 5250}{\lg 27}$. La règle . nous donne lg 5 250 = 3,72 et lg 27 = 1, 431, d'où x = 2,6.

La recherche d'un nombre dont le logarithme est donné se fait évidemment en sens inverse. Soit lg x = $\bar{2},715$. La mantisse est 0,715 qui placée sur L donne x = 5,19 sur D. La caractéristique - 2 indique qu'il y a deux zéros en avant, donc x = 0,0519.

2. Cologarithme d'un nombre.

Rappelons que les soustractions de logarithmes ne sont pas faciles, quand on a des caractéristiques négatives. C'est pourquoi on les ramène à des additions, grâce au cologarithme (colg) qui est défini par la relation $co\lg x = \lg \dfrac{1}{x} = -\lg x$. Ceci nous permet d'écrire, pour $z = \dfrac{y}{x}$ **:** $\lg z = \lg y - \lg x = \lg y + co\lg x$.

Or, le cologarithme d'un nombre s'obtient très facilement à partir du logarithme de la manière suivante:

1° Mantisse. - Retrancher de 10 le dernier chiffre de droite, différent de zéro et tous les autres de 9.

2° Caractéristique. - Changer de signe celle du nombre et ajouter - 1. On reconnaît ici le Ct d'un inverse, puisque c'est bien de cela qu'il s'agit.

Exemple: lg 346 = 2,539 colg 346 = $\bar{3},461$

lg 0,056 = $\bar{2},748$ colg 0,056 = 1,252

lg 0,23 = $\bar{1},362$ colg 0,23 = 0,638

Ce calcul du cologarithme est assez vite fait, mais la règle de RIETZ permet de le simp!ifier, en donnant directement la mantisse. On comprend, qu'en s'appuyant sur la relation ci-dessus, il suffit de placer *x* sur l'échelle des inverses CI pour obtenir en lecture directe sur L, la mantisse.

Exemple : colg 1,82 = 0,740 colg 2,96 = 0,529.

Cette nouvelle facilité peut nous inciter à effectuer par logarithme certains calculs entraînant une longue manipulation de la règle, mais la précision obtenue sera la même.

Exemple : Soit $x = \dfrac{27 \times 0{,}58}{0{,}126 \times 3760 \times 0{,}062}$

Par lecture directe sur L et avec D ou CI on peut poser rapidement les logarithmes et cologarithmes ci contre.

L'addition nous donne une mantisse de 728, correspondant à 5,34 ; avec le Ct – 1 on obtient *x* = 0,534

lg 27	= 1,431
lg 0,58	= $\bar{1},764$
colg 0,126	= 0,900
colg 3760	= $\bar{4},425$
colg 0,062	= 1,208
lg *x*	= $\bar{1},728$

Exercice n° 20

logarithmes de: a) 175 b) 0,038 c) 2 680 d) 0,000 74

cologarithmes de : e) 532. f) 0,92 g) 19,5 h) 46 500

3. Usages des décibels.

Les acousticiens et les électroniciens emploient les logarithmes sous une forme particulière, qui leur est précieuse et pratique, dès qu'il s'agit d'exprimer l'amplification ou l'affaiblissement d'une grandeur sonore ou électrique. Nous allons montrer que la règle est pour ces techniciens une table de conversion de décibels en rapports et vice-versa.

Rappelons d'abord la définition de l'unité appelée «bel». Le « bel» exprime le rapport de deux puissances sonores, dont l'une est-dix fois plus grande que l'autre. Pour un rapport r = 10 on a donc 1 bel, on voit que cette unité est le logarithme du rapport r. Pour deux puissances quelconques P_1 et P_2, on aura $r = \frac{P_1}{P_2}$, et pour valeur en bels : n = lg r.

Dans la pratique courante, cette unité est un peu trop grande, aussi on préfère utiliser son sous-multiple, le décibel, qui vaut ainsi 0,1 bel et sera noté dB.

Par suite on peut écrire n = 10 lg r dB.

3.1. Décibels positifs, r > 1.

Si la puissance P_2 est plus grande de P_1, c'est que celle-ci a subi une amplification, et r > 1. Cette amplification s'exprime donc par des décibels positifs. Soit, par exemple r = 2,4, par définition, l'amplification vaut n dB = 10 lg 2,4. L'échelle L nous donne lg 2,4 = 0,38 d'où n = 3,8 dB. On remarque que le chiffre des unités 3 (premier chiffre de la mantisse) est gravé sur l'échelle L comme étant l'une des-dix grandes divisions de cette échelle. On peut en pratique, considérer que L est graduée de 0 à 10 dB quand r de 1 à 10 est lu sur D. On a ainsi une lecture plus directe, et sans calcul.

Exemples : r = 4,8 n = 6,81 dB

r = 6,36 n = 8,04 dB

Pour les valeurs quelconques de *r*, on réduira le nombre avec le Ct habituel et, comme *r* = 10 correspond à 10 dB, il est facile de comprendre qu'on doive ajouter aux *n* dB du nombre réduit autant de fois 10 dB que d'unités au Ct.

Exemples : *r* = 276 *n* = 20 + 4,41 = 24,41 dB
r = 6 450 *n* = 30 + 8,10 = 38,10 dB

3.2. - Décibels négatifs, r < 1

Supposons maintenant $P_2 < P_1$, alors r < 1 et la puissance P_1 a subi un affaiblissement qui va se traduire en décibels négatifs. Soit *r* = 0,68 ce rapport signîfie en fait que P_1 a été affaiblie de $\frac{1}{r} = 1{,}47$ fois. C'est cette valeur qui détermine le nombre de décibels, soit *n* = 1,68 dB, que l'on affectera du signe moins, pour marquer que c'est un affaiblissement donc *r* = 0,68 correspond à *n* = - 1,68 dB. On reconnaît que cette valeur n'est autre que *n* = 10 colg 0,68 = - 1,68. Ceci nous indique comment trouver directement les décibels négatifs. On placera *r* sur l'échelle CI et *n* de 0 à - 10 est lu sur L.

Exemple : *r* = 0,45, *n* = 3,47 ; *r* = 0,266, *n* = 5,75

On remarque que *r* est placé avec sa vraie valeur (Mp - 1) sur CI, celle-ci étant donc supposée graduée de 0,1 à 1. Cette particularité fera que pour des nombres quelconques, on devra les réduire entre ces deux limites, et que le Ct dans ce cas, sera celui du nombre, moins une unité, en valeur absolue (ou nombre de zéros à droite de la virgule). Ce Ct correspond à l'addition d'autant de fois - 10 dB.

Exemples :

r = 0,053 *n* = - 10 - 2,76 = - 12,76 (Ct = - 2 + 1 = - 1)
r = 0,0073 *n* = - 20 - 1,37 = - 21,37 (Ct = - 3 + 1 = - 2)

3.3. - Lois récapitulatives.

Pour exprimer en décibels un rapport de puissance, opérer comme suit:

1° Rapport supérieur à 1.

Réduire le rapport donné avec le Ct habituel. Lire: *r* sur D et *n* de 1 à 10 sur L.

Ajouter ensuite Ct fois 10 dB.

2° Rapport inférieur à 1.

Réduire de même avec Ct. Lire *r* sur CI et *n* négatif de de 0 à - 10 sur L. Ajouter ensuite (Ct + 1) fois - 10 dB.

Pour la conversion inverse, il suflira de prendre à reculons les opérations ci-dessus. D'où en premier, retrancher un nombre entier de ±10 dB du nombre de décibels donné, ce qui fournira le Ct de *r*, directement si $n > 0$ et en ajoutant - 1 si $n < 0$. Placer ensuite le nombre résiduel de décibels sur L et lire le rapport sur D ($n > 0$) ou sur CI ($n < 0$) de 1 à 10.

4. Rapports de tensions ou de courants.

Les rapports de puissance sont souvent exprimés par les électroniciens à partir de la tension électrique *U* ou du courant *I* qui les produisent dans une impédance *Z*. Voyons donc comment un rapport de tension peut se traduire en décibels. On sait que la puissance créée dans une impédance *Z* est donnée par les expressions $P = \dfrac{U^2}{Z}$ ou $P = I^2 Z$ ce qui conduit aux relations $\dfrac{P_2}{P_1} = \left(\dfrac{U_2}{U_1}\right)^2$ ou $\dfrac{P_2}{P_1} = \left(\dfrac{I_2}{I_1}\right)$ soit $\dfrac{P_2}{P_1} = r^2$, *r* étant cette fois le rapport des tensions ou des courants. On voit que, par suite, la valeur précédente *n* dB devient :

$$n = 10 \lg \frac{P_2}{P_1} = 10 \quad \lg r^2 = 2 \times 10 \quad \lg r = 20 \quad \lg r$$

Pour obtenir directement la valeur en décibels d'un rapport de tensions, il suffit de multiplier par 2 la valeur calculée pour les puissances, c'est-à-dire en pratique, doubler la lecture sur L et ajouter un nombre entier de ± 20 dB.

Exemples :

r = 327 n = 40 + (2 x 5,15) = 50,30 dB (Ct = 2)

r = 0,043 n = - 20 + (2 x - 3,67) = - 27,34

(Ct = - 2 + 1 = - 1)

Pour la conversion inverse des décibels en rapports, on retranchera d'abord un multiple de ± 20 dB pour obtenir le Ct, et le nombre résiduel sera divisé par 2 avant d'être placé sur L.

Exercice n° 21

Convertir en décibels les rapports suivants :

Puissance :	a) 375	b) 0,28	c) 0,0016	d) 54,3
Tension :	e) 64,5	f) 7 240	g) 0,37	h) 0,0015

5. Produit d'un nombre quelconque par un nombre de décibels.

L'électronicien a maintes fois besoin de savoir ce que devient une puissance (ou tension) après avoir subi une amplification (ou affaiblissement) chiffrée en décibels, du fait que la plupart des appareils de mesure sont gradués avec cette unité, devenue d'emploi universel.

5.1. - 1er cas. - puissances.

Soit P la puissance et n l'amplification en décibels. On peut, bien sûr, convertir avec la règle n en r et faire le produit $r. P$. Mais la règle permet d'aller plus vite en effectuant directement le produit symbolique $n . P$. Ce calcul ressemble à celui de $x\sqrt{y}$ dans lequel il n'était point besoin de lire le radical mais seulement de placer y sur B. Ici c'est n qui sera posé directement sur L et on ne lira pas r, mais de suite le produit $r. P$ obtenu automatiquement.

►Suivant le modèle de règle dont disposera le lecteur, L peut se trouver sur la règle ou sur la réglette. Ceci ne gêne en rien le calcul, mais le premier facteur à poser sera *n* pour la première disposition et *P* pour la seconde. L'explication sera donnée pour cette dernière (L sur réglette).

Exemple 1 : Soit *P* = 2,7, *n* = 4,5 dB.

Amener 1C sur 2,7 comme pour un produit habituel. Puis placer le Tc sur 4,5 de L; le résultat est sur D avec le Tc soit 7,61.

Exemple 2 : *P* = 4,1, *n* = 7,6 dB.

Cette fois le produit ne peut être obtenu qu'avec 10C sur 4,1 de D. Il y a donc Mp + 1 et *nP* = 23,6.

Exemple 3 : *P* = 37,5, *n* = 28,4 dB.

Ici les nombres sont quelconques. Le Ct de *P* est + 1. Celui de *n* est + 2, car on peut retrancher 20 dB pour obtenir *n* réduit à 8,4. Le produit donne en lecture 2,59 avec Mp + 1. Le résultat est donc *n. P* = 25 900 puisque Ct = + 1 + 2 + 1 = + 4.

►Etudions maintenant le produit d'une puissance par un affaiblissement (*n* négatif). Souvenons nous que *n* est ici un cologarithme, c'est donc par un quotient que le calcul sera résolu, en posant *n* toujours sur L.

Exemple 1 : *P* = 5,15, *n* = - 3,2 dB.

En plaçant 3,2 de L en face de 5,15 de D, on obtient le résultat sous 1C, soit 2,46.

Exemple 2 : *P* = 1,85, *n* = 6 dB.

En opérant de même on lit 4,65, mais sous 10C, ce qui amène Mp - 1. Le résultat est donc 0,465.

Exemple 3 : *P* = 530 *n* = - 28 dB.

Pour *P*, on a Ct + 2. Pour *n*, Ct = - 2 obtenu en retranchant - 20 dB. Le quotient avec 8 dB donne 8,4 et Mp - 1. En final : *nP* = 0,84 (+ 2 - 2 -1 = - 1).

Soulignons que pour ce dernier exemple, avec *n* quelconque, le Ct est bien obtenu directement à partir du nombre de 10 dB retranché (ici 2) sans qu'il soit besoin d'ajouter - 1. Ceci n'est nécessaire que lorsqu'on cherche la valeur de *r* sur CI et provient en fait de l'emploi de cette échelle. Ainsi, pour n = - 28 dB, on a bien *r* = 0,001585 avec Ct = - 2 - 1 = - 3. Il faut bien comprendre que le quotient réalisé directement avec L correspond à $\frac{1}{r} = \frac{1}{630}$ dont le Ct est bien - 2.

Si l'échelle L se trouve sur la règle, le quotient sera effectué en renversant le rôle de L et C et le résultat apparaîtra au-dessus de 1D ou 10D.

En résumé, le calcul d'une puissance amplifiée se traite comme un produit et celui d'une puissance affaiblie comme un quotient en plaçant *n* réduit sur L. Le Ct de *n* est égal au nombre de ±10 dB que l'on retranche pour la réduction.

5.2 - 2° cas. -Tensions ou courants.

Le calcul d'une tension (ou courant) amplifiée ou affaiblie se traitera exactement comme ci-dessus en tenant compte du facteur 2 relatif au nombre de décibels à savoir :

-C'est la moitié de *n* réduit que l'on placera sur L pour le produit ou quotient.

-Le Ct de *n* est égal au nombre de ± 20 dB que l'on retranche pour la réduction.

Exemples :

750 x (- 17 dB) = 106	Ct + 2		8,5 sur L
32 x (+ 16 dB) = 202	Ct + 1	Mp + 1	8 sur L
0,65 x (+ 24 dB) = 10,3	Ct - 1 + 1	Mp + 1	2 sur L
425 x (- 35 dB) = 7,57	Ct + 2 - 1	Mp -1	7,5 sur L

Exercice n° 22

Calculer les produits suivants :

►Puissances : a) 725 x (14 dB) b) 0,38 x (26 dB)
c) 82 x (9 dB) d) 0,054 x (- 15 dB) e) 26,5 x (- 29 dB)

►Tensions :a) 24 x (37 dB) b) 1,75 x (29 dB)
c) 0,62 x (43 dB) d) 74 x (- 18 dB) e) 0,47 x (- 32 dB)

CHAPITRE 10

LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

EMPLOI DES ÉCHELLES DE SINUS

La règle à calcul, avec ses échelles **S**, **T**, et **ST**, constitue une table de valeurs des lignes trigonométriques. Mais elle est mieux encore, car elle permet le calcul direct de toute expression contenant une ou plusieurs de ces lignes. Elle devient donc l'auxiliaire indispensable du géomètre, pour ses triangulations, comme du physicien ou de l'électronicien, pour leurs fonctions sinusoîdales.

1. - Règle de Mannheim - Sinus

Nous donnons rapidement, pour cette règle maintenant désuète, la façon de trouver sin α. L'échelle S située au verso de la réglette peut être lue grâce à l'encoche de la règle. En face du trait servant d'index, gravé sur le bord de cette encoche, on placera l'angle α donné (*fig.41*). Le dit index est par construction, en alignement

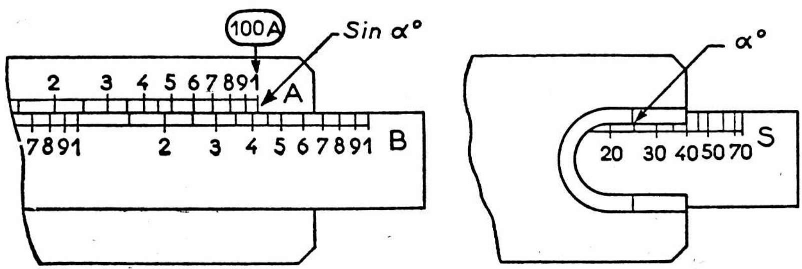

FIG. 41.

avec ceux de l'extrémité droite de la règle ; c'est pourquoi on lira sin α, sous 100A et sur l'échelle B. L'échelle S est graduée de 0° 35' à 90°, pour les angles et la lecture du sin se fait sur l'échelle des carrés ; ceci sous-entend qu'il y aura deux valeurs possibles pour le Mp. En effet, on sait que sin α < 1, d'où pour les angles de 5° 45' à 90° dont le sin se lit sur B2, on peut dire que Mp = - 1. On aura par exemple sin 15° 20' = 0,264 et sin 28° = 0,47. Pour ceux de 0° 35, à 5° 45' dont le sin se lit sur B1, on aura Mp = - 2 de toute évidence.

Par exemple : sin 1° 40’ = 0,029 et sin 3° 40’ = 0,064.

Remarque I. - Si l'on a de nombreuses valeurs à chercher, on a intérêt à réaliser la correspondance directe entre S et A. Pour cela on sortira la réglette pour la replacer dans les glissières avec son verso au-dessus; ce qui permet avec la règle fermée de se servir du Tc pour lire sin α en face de α.

Remarque II. - Pour les angles inférieurs à 0° 35', se reporter au calcul indiqué pour la Rietz, ci-après.

2. - Règle de Rietz (et double face) - Sinus.

2.1. Avant-propos.

Avec une règle moderne, à double face, on trouve les échelles S, T et ST, situées sur le recto de la réglette, c'est-à-dire sur la face comportant les échelles A, B, C, D. La correspondance entre l'angle α et son sinus est donc obtenue grâce au Tc, mais la lecture se fait ici sur l'échelle des nombres C (ou D règle fermée). C'est là un avantage sur la règle Mannheim, puisque la précision de lecture de C est double de celle de B. Mais cette disposition a entraîné la nécessité d'une deuxième échelle ST propre aux petits angles (0° 35’ à 5° 45’), donc également plus précise dans sa lecture.

Avec la règle de Rietz, les échelles S, T et ST se trouvent au verso de la réglette. On peut retrouver la disposition ci-dessus en retournant la réglette, ce qui est toujours réalisable sans inconvénient. Mais on peut aussi placer directement α en vis-à-vis de l'index d'une encoche, située à l'extrémité droite de la règle. Cet index est en fait, en alignement avec ceux de la règle, savoir 100A - 10D. C'est donc avec ce dernier que l'on pourra lire sin α sur C.

Nous ne retiendrons, dans l'exposé qui suit, que l'emploi supposé du Tc, pour nos calculs, étant sous-entendu que le possesseur d'une règle de Rietz n'aura qu'à remplacer l'alignement réalisé avec le Tc par celui de: index encoche - 10D - 100A ; les lectures et les Mp étant toujours les mêmes.

2.2. Angles compris entre 5°45' et 90°.

Ces deux valeurs limites sont celles des graduations de l'échelle S. Celle-ci comporte des traits de subdivision, gravés toutes les 5 minutes d'angle de 5° 45’ à 10°, ensuite toutes les 10 minutes entre 10° et 20°, puis toutes les 20 minutes entre 20° et 40° et 30 minutes entre 40° et 70° ; enfin de 70° à 90°, on a seulement un trait à chaque degré ; on voit que sur cette partie finale de l'échelle, l'angle ne pourra être lu avec une bonne précision, ce qui nous amènera à envisager certains artifices pour obtenir une meilleure exactitude dans le calcul du sin de tels angles. Il suffit de placer le Tc sur α de S, pour lire sin α sur C avec un Mp - 1 (*fig. 42*).

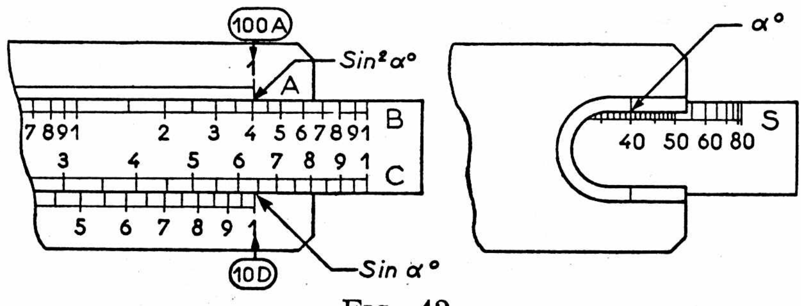

Fig. 42.

Exemples : α = 19° 40’ sin α = 0,336
α = 37° 30 sin α = 0,608.

***Remarque*. -** Depuis une dizaine d'années, on utilise souvent une division centésimale du degré, qui rend plus facile toutes les opérations sur les angles et cette innovation, recommandée d'ailleurs en France par l'A.F.N.O.R., va tendre à se généraliser dans l'avenir, pour finir par rendre caduc l'emploi des grades qui perdent ainsi leur seul avantage. Ceci explique que le lecteur puisse dès maintenant, trouver dans le commerce, des règles dont les échelles S, T et ST sont à subdivisions centésimales, et ceci pour les différents types actuellement fabriqués.

A partir de la manipulation précédente (Tc) d'autres grandeurs peuvent se lire aussi directement sur la règle, conséquence de l'emploi de C (Système Rietz).

►En premier lieu, sin2 α se lit sur B, sans difficulté avec les Mp - 2 et - 1 (B2). C'est là une grandeur souvent rencontrée.
►Ensuite, on peut aller jusqu'à lire sin3 α sur K avec Mp - 3 - 2 et - 1 (K3) (Règle fermée).
►Enfin, si l'on a besoin de connaître lg sin α, l'échelle L la fournira (mantisse) avec toujours Tc sur α.

2.3. Angles compris entre 0° 35 et 5° 45'.

Pour ces angles, qualifiés « petits angles », nous disposons de l'échelle spéciale ST. Celle-ci comporte jusqu'à 3° une division par minute sexagésimale, puis de 3° à 5°, un trait par 2 minutes, enfin au-delà de 5° un trait par 5 minutes. On peut donc placer sur cette échelle, avec précision, un angle à moins d'une minute près surtout au-dessous de 1°, où la minute est souvent divisée en deux (30 secondes).

En plaçant le Tc sur α de ST, on pourra lire :
►sin α sur C avec Mp - 2
►$\sin^2$ α sur B avec Mp - 4 et - 3 (B2)
►$\sin^3$ α sur K avec Mp - 6, - 5 et - 4 (K3)

Exemples : sin 1° 06' = 0,019 2 $\quad$ $\sin^2$ 2 ° 13' = 0,001 5

Remarque importante. - L'échelle ST n'est pas une véritable échelle des sinus, mais en réalité une échelle des arcs en radians. On peut d'ailleurs le vérifier en amenant α = 1° au-dessus de 1D ; on constate alors d'une part que les valeurs de 1°, 2°, 3°, 4° et 5°, sont exactement en vis-à-vis des mêmes chiffres sur D, et d'autre part qu'en face de 1° se trouve, sur C, la valeur de 1° = 0,017 45 rd (quotient π : 180). L'échelle ST réalise donc en fait le produit de cette valeur en radian, par l'arc en degré. Or, on sait que pour de tels petits angles, on peut confondre le sinus et la tangente avec l'arc lui-même. Cette approximation ne peut être jugée insuffisante que pour les angles supérieurs à 3°, quand le calcul nécessite une grande précision. Nous indiquons au chapitre 14 comment corriger, au besoin, le calcul pour obtenir une valeur plus exacte du sinus et de la tangente.

2.4. Angles inférieurs à 0° 35’.

Pour ces très petits angles, on peut bien dire sans erreur appréciable, que sin α = tg α = arc α. C'est donc celui-ci que nous allons calculer en radians. Comme 1° = 60’ = 0,017 45 rd, nous avons. 1’ = 0,000 290 88 rd.

Il suffirait donc de multiplier cette valeur par α en minutes pour obtenir l'arc (et le sinus). Cependant avec la règle on opérera autrement en prenant l'inverse de la valeur précédente soit 3 437 qui représente la valeur en minutes de l'arc de 1 radian et ce facteur devient un diviseur. Ce dernier se trouve marqué spécialement sur C à la valeur 3,437 et désigné généralement par la lettre grecque: ρ'.

En pratique, on effectuera donc le calcul suivant :

sin α ' = α '/ ρ', en tenant compte du Mp + 3, propre au diviseur et de celui du quotient (- 1), s'il y a lieu.

Exemples : α = 12' = 0,003 49 = sin α
α = 9' = 0,002 62 = sin α.

On peut remarquer que pour α de 35' à 3'25", le Ct résultant pour le sinus est - 3, c'est-à-dire la valeur suivant celles des deux premiers cas (1 et - 2), ce qui est bien normal.

Si maintenant l'angle α est exprimé (ou converti) en secondes, nous ferons un calcul analogue au précédent grâce à un deuxième diviseur ρ’’, également marqué sur C et dont la valeur est ρ’’ = 206 265 (Mp + 5), soit l'inverse de la valeur en radian de l'angle de 1 0,000 004 848 rd.
D'où: sin α" = α" / ρ’’

Exemples : α = 55" = 0,000 267 = sin α
α = 18" = 09000 087 2 = sin α.

Pour un angle comprenant minutes et secondes, on peut faire le calcul en convertissant au préalable l'angle en secondes mais le calcul peut être plus précis en effectuant séparément le calcul des minutes, puis des secondes et en faisant la somme des résultats, ce qui n'est guère plus long.

Exemple : α = 2' 38" 2' = 0,000 582
38" = 0,000 184
d'où sin 2' 38" = 0,000 766

Ce résultat serait lu avec moins de précision par la conversion; à vérifier (α = 158’’).

Moyen mnémonique pour les Mp.

Il est certain que le lecteur n'oubliera pas que les facteurs ρ' et ρ’’ marqués sur sa règle jouent le rôle de diviseurs pour le calcul de l'arc en radian. Par contre, il pourra peut-être un jour hésiter à fixer les Mp correctement, s'il n'a pas sous la main ce livre pour les retrouver. Voici donc un moyen simple qui pourra aider sa mémoire :
de 5° 45, à 90°, Mp = 0. Carré: 0, + 1 (A2).L'angle de 1 minute s'écrit exactement 0° 01’, soit avec trois chiffres, d'où Mp + 3 pour ρ'.

L'angle de 1 seconde, s'écrit de même 0°00’01’’, soit avec *cinq* chiffres, d'où Mp + 5 pour ρ’’.

Remarque I. - Bien que l'emploi des grades soit appelé à, disparaître indiquons que l'on trouve encore sur les règles actuelles un diviseur, relatif au calcul des très petits angles exprimés en minutes centésimales de grades. Celui-ci est situé à la valeur 6,366 de C et sera utilisé comme ci-dessus avec Mp + 3. Ce diviseur est généralement désigné par ρ''.

Exemple : α = 0,278 5 gr = 27,85'' = 0,004 38 = sin α.

Remarque II. - Le possesseur d'une règle, portant les divisions décimales du degré n'a plus besoin de faire appel aux diviseurs pour les angles inférieurs à 0,57°. En effet, d'après ce qui a été dit ci-dessus pour l'échelle ST, celle-ci donnera le calcul exact en ramenant l'angle donné, à une valeur lue sur elle-même, et au Mp - 2, on ajoutera le Ct nécessaire pour cette réduction.

Exemples : Soit: sin 0,016 5°, l'angle peut-être ramené à 1,65, avec Ct - 2. L'échelle ST donne alors sin α = 0,000 288, puisqu'au total Ct = - 4.

Soit encore sin 0,084 5°, l'angle réduit est 0,845° avec Ct - 1, d'où sin α= 0,001475.

Exercice n° 23

Calculer les sinus des angles suivants :

a) 6° 25' b) 9° 30 ' c) 13° 10 ' d) 16° 15' e) 27° 50'
f) 52° 45' g) 0°57' h) 1° 45' i) 3° 24'

Petits angles en degrés :

a) 0° 23' b) 0°08'33'' c) 48'' d) 17''.

Petits angles en grades :

e) 0,22 f) 0,054 5 g) 0,007 6 h) 0,09.

3. - Calcul d'un cosinus.

Si le lecteur possède une règle munie d'une échelle spéciale des cos (**P**), il se reportera au chapitre suivant. Dans le cas contraire, le calcul d'un cos se fera avec les échelles S et ST grâce à la formule classique cos α = sin (90° - α).

Pour faciliter ce calcul, les fabricants ont d'ailleurs inscrit sur les règles modernes certaines valeurs complémentaires de α (S), soit 20, 30, 40, 50, 55, 60, 65, 70, 75 et 80 degrés et ceci en chiffres rouges, puisqu'ils croissent de droite à gauche. On peut ainsi, avec un peu d'attention, placer α directement en lisant cette échelle S à rebours, et sans avoir à faire la soustraction 90) - α.

Bien entendu, les valeurs de $\cos^2 \alpha$ et $\cos^3 \alpha$ sont obtenues directement sur B et K. Pour les angles compris entre 84°15' et 89° 25'. le complémentaire est évidemment reporté sur ST. Pour les angles inférieurs à 5° 45’, voir au chapitre suivant.

4.- Calcul de la cosécante.

Bien que cette ligne soit peu utilisée, indiquons que sa lecture est également directe. En effet $\text{cosèc}\ \alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$, ce qui nous indique que sa valeur sera trouvée sur CI, ou encore sur D en face de 1C, lorsque α est sur 10D ; cette deuxième lecture pouvant fournir $\text{cosèc}^2\ \alpha$ directement sur A avec 1B (*fig.43*).

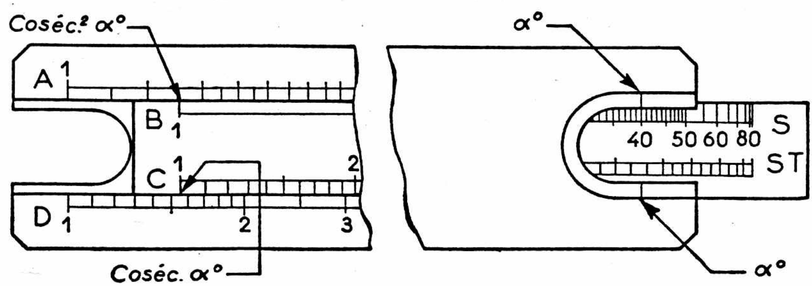

FIG. 43.

Précisons les Mp qui sont :

► de 35' à 5° 45’, Mp = 1. Carré: 2, + 3 (A2)
►de 5° 45, à 90°, Mp = 0. Carré: 0, + 1 (A2).

CHAPITRE 11

EMPLOI DE L'ÉCHELLE DES COSINUS

L'échelle des cosinus (**P**) appelée aussi échelle de Pythagore a été ajoutée depuis quelques années sur les règles modernes, et a une utilité certaine, comme on pourra en juger par son étude.

1. Définition et lecture.

► L'échelle P est graduée de telle sorte qu'à la valeur *x* de C, D (supposée chiffrée de 0,1 à 1) va correspondre sur elle, la valeur $y = \sqrt{1 - x^2}$. De cette formule, on peut déduire que $x = \sqrt{1 - y^2}$. On a donc une réciprocité de lecture entre les échelles P et D, dont nous pourrons nous servir.

► Comme cette échelle P est spécialisée, elle est chiffrée en vraie grandeur, soit de 0 à 0,995, mais les valeurs vont en croissant de droite à gauche et la lecture doit se faire dans ce sens (d'ou chiffres rouges). Mais cela sous-entend par définition, que l'échelle C est lue comme allant de 0,1 à 1 (Mp - 1 obligatoire).

2. Hypoténuse du triangle rectangle.

Grâce à P, le calcul de l'hypoténuse d'un triangle rectangle devient très rapide, et nous en avons exposé le principe au chapitre 8.

3. Cosinus d'un angle compris entre 5° 45’ et 90°.

Si dans l'expression $\sqrt{1-x^2}$, nous posons x = sin α, on voit que l'échelle P va nous donner y = cos oc. Il suffit de placer oc sur S pour lire cos a sur P, et en vraie grandeur, puisque sin oc se trouve sur D.

Exemples : cos 9° 25’ = 0,986 55 - cos 20° 45' = 0,934 5.

4. Cosinus d'un angle inférieur à 5°45'.

Pour un tel petit angle, on ne peut plus faire appel à P, ni à l'angle complémentaire, dont la précision n'est plus suffisante. Le calcul se fera donc grâce à la formule fournie par le développement en série de : $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} + \cdots$ dont seuls les deux premiers termes seront conservés, soit : cos α = 1 - 0,5 α^2. α doit être exprimé en radians et nous savons en faire le calcul soit avec ST, soit avec ρ' ou ρ’’. Pour les angles supérieurs à 35' nous obtenons d'ailleurs directement α^2 sur B., à partir de α placé sur ST.

Exemple : α = 4° 30. On peut lire directement α^2 = 0,006 18,
d'où cos α = 1 - 0,003 09 = 0,996 91.

5. Sinus d'un angle supérieur à 70°.

Nous avons dit précédemment qu'un angle supérieur à 70° ne pouvait être lu avec précision sur S par suite du resserrement des divisions à la fin de cette échelle. Si on dispose de l'échelle P, celle-ci nous procure une solution heureuse pour le sinus de tels angles. En écrivant cette fois sin α = cos (90° - α), on voit que pour les angles de 70° à 84° 15', le calcul du sinus est ramené à celui du cosinus des angles de 5° 45’ à 20° obtenu facilement sur P.

Si l'angle est supérieur à 84° 15’, son complémentaire est un angle inférieur à 5°45' et le calcul du sinus est ramené à celui du § précédent, qui lui n'utilise pas P.

6. Expressions particulières.

L'emploi conjugué des échelles P et CI nous permet le calcul direct par une simple lecture de deux expressions particulières, dont nous donnerons une application possible.

Si nous plaçons, en premier lieu le TC sur *x* (de 0 à 0,995) de P, nous lisons sur CI, une valeur égale à $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et ceci en vraie grandeur (1 à 10).

Or, cette expression est, en outre, susceptible de nous fournir le calcul d'un cosinus hyperbolique à partir de la tangente supposée connue. En effet, nous avons *ch y* = $\frac{1}{\sqrt{1-th^2 y}}$ donc pour toute valeur de *th* portée sur P, nous aurons, par lecture directe, *ch* sur CI.

Exemples : *th y* = 0,974, *ch y* = 4,41 et *th y* = 0,885, *ch y* = 2,15.

Si maintenant, nous plaçons le TC sur *x* de CI, nous obtenons par lecture réciproque $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ sur P. Ceci nous conduit évidemment au calcul inverse du précédent, soit $th \quad y = \frac{\sqrt{ch \quad y^2-1}}{ch\, y}$.Pour toute valeur de ch (l à 10) on lira directement th.

Exemples : *ch y* = 7,15, *th y* = 0,9902 et *ch y* = 1,62, *th y* = 0,787.

Indiquons encore que la valeur 1 - x^2 peut être obtenue directement sur B pour toute valeur de x (0 à 0,995) de P.Mais cette fois nous avons les Mp - 2 et - 1 (B2) du fait que le radical lu sur C est affecté du Mp – 1 par principe de l'échelle P.

Exemples : 1 - $0{,}525^2$ = 0,725 1 - $0{,}987^2$ = 0,025 8.

CHAPITRE 12

EMPLOI DE L'ÉCHELLE DES TANGENTES

Pour cette échelle T (MANNHEIM et RIETZ), nous retrouverons les mêmes modalités de lecture que pour S; cependant T n'est graduée que jusqu'à 45° (tg 45° = 1), on aura en conséquence, 6 cas de lecture au lieu de 3, suivant la valeur de l'angle. Cette échelle porte un trait de subdivision toutes les 5' pour α de 5° 45' à 20° et toutes les 10' de 20° à 45°. Avec la règle à double-face, la correspondance se fera encore de T à C avec le Tc. Avec la règle de RIETZ (ou MANNHEIM), nous aurons encore recours à l'index d'encoche, mais celle-ci peut se trouver à droite de la règle (fabrication actuelle) auquel cas 10D et 100A seront encore utilisés pour les lectures, ou bien à gauche (fabrication ancienne) auquel cas correspondent 1D et 1A, le reste étant inchangé.

Voyons maintenant les différents cas de lecture de la tangente, suivant les valeurs croissantes de l'angle donné.

1. Angle inférieur à 35'

Même calcul que pour le sinus soit $tg\ \alpha = \alpha'/\rho'$ ou $tg\ \alpha = \alpha''/\rho''$.

2. Angle de 35' à 5° 45'.

Comme. pour le sinus, emploi de ST et lecture de tg α, $tg^2\ \alpha$ $tg^3\ \alpha$ sur les échelles déjà indiquées avec, les mêmes Mp.

Voir au chapitre 9, la correction de l'approximation pour $\alpha > 3°$.

3. Angle de 5° 45’ à 45°.

Emploi de T pour placer α et lectures sur les mêmes échelles (mêmes Mp) de tg α, tg^2 α et tg^3 α, que pour sin α avec S.

4. Angle de 45° à 84° 15’.

Nous nous appuierons, pour ces angles, sur la formule classique tg α = cot (90° - α) en ajoutant que la cotangente est, par définition, l'inverse de la tangente, d'où le principe du calcul.

La valeur de 90° - α retombe dans les limites du cas 3 précédent. Cet angle sera donc placé sur T et tg α sera lue directement sur CI ou sur DI comme étant l'inverse de tg (90° - α). Mais il convient d'ajouter que pour. cette dernière on a Mp - 1, donc pour tg α on a zéro (vraie grandeur) (*fig. 44*).

Exemples : tg 54° 25’ = cot 35° 35' = 1,398; tg 72°45’ = 3,22.

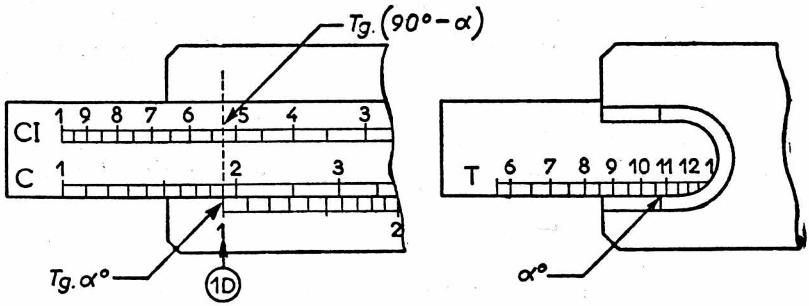

FIG. 44.

Indiquons que ici encore on peut, avec une règle moderne éviter de calculer 90° - α, puisque les valeurs complémentaires sont aussi marquées en rouge pour 50°, 55°, 60°, 65°, 70°, 75 et 80°.

L’emploi de CI, ci-dessus, ne permet plus d'obtenir directement tg^2 α et tg^3 α, mais on peut cependant. éviter le report de tg α pour effectuer ces calculs, en adoptant pour les règles à double face, une manipulation analogue à celle de la Rietz. En effet, plaçons 90° - α sur 1D ou 10D au choix, nous retrouverons tg α (D) sous 1C ou 10C, et par suite tg^2 α face à 1Bou 100B, et sur A1 (Mp 0) ou A2 (Mp + 1), puis tg^3 α avec les mêmes index, sur K avec Mp 0, + 1 et + 2 (K3). Ce procédé est donc commun aux deux types de règle.

5. Angles de 84° 15’ à 89° 25'

Pour ces angles, nous continuerons à passer par 90° - α, qui maintenant est un petit angle, d'où l'emploi de ST avec les modalités du cas précédent. En plaçant sur cette échelle 90° - α, au-dessus de 1D ou 10D, on lira face à 1B ou 100B :

- ► - tg α sur D avec Mp + 1
- ► - tg^2 α sur A avec Mp + 2 et + 3 (A2)
- ► - tg^3 α sur K avec Mp + 3, + 4 et + 5 (K3).

Exemples : tg 86°46’ = 17,7 tg 88° 23’ = 1 260.

6. Angles de 89° 25’ à 90°.

Cette fois, le complémentaire 90° - α, est un très petit angle, pour lequel l'emploi des diviseurs devient nécessaire, et on peut écrire :

$tg\alpha = \frac{\rho'}{(90-\alpha)'}$ ou $tg\alpha = \frac{\rho''}{(90-\alpha)''}$ formules applicables aux angles en grades avec ρ.

Exemples : tg 89° 54' = 573 tg 89° 57’ 35’’ = 1 420.

Exercice n° 24

Calculer les tangentes des angles suivants :

a) 7° 45’ b) 12° 25' c) 37° 10’ d) 1° 14' e) 2° 06'
f) 4° 52' g) 58° 15' h) 66° 30' i) 80° 30’ ’j) 86° 25'
k) 87° 30’ l) 89° m) 89° 34' n) 89° 44' 16" o) 89° 54’ 25’’

7. Calcul d'une cotangente.

Nous avons déjà montré comment cot (90° - α) pouvait se lire directement ; le procédé s'étend naturellement à toutes les valeurs de α ; il suffit dans tous les cas d'inverser les index 1D et 10C (ou I0D et 1C) pour obtenir la cotangente au lieu de la tangente. Pour celle-ci seule, à l'exclusion du carré et du cube, on peut aussi avec le Tc inverser les échelles C et CI, pour avoir une lecture directe. Les Mp de la cotangente sont déduits de ceux de la tangente par la loi de l'inverse.

CHAPITRE 13

OPERATIONS COMBINÉES
(NOMBRES, SINUS, TANGENTES)

Dans les formules de résolution des triangles et dans celles de certaines grandeurs physiques, on rencontre des produits, ou quotients de nombres, avec des lignes trigonométriques. De telles expressions sont calculables directement sur la règle, sans que l'on ait besoin de connaître ces lignes, puisque l'angle, seul servira à effectuer l'opération. Cette possibilité s'apparente aux autres cas déjà rencontrés, tels que produit d'un nombre par un carré, un radical et aussi par un nombre de décibels. Pour ces calculs, nous ramènerons les échelles de la RIETZ, S, T et ST sur le recto, en retournant la réglette, lui donnant ainsi la disposition d'une règle double-face.

1. - Premier genre : $a \sin \alpha$ et $a \sin \alpha \sin \beta$

Les échelles S et ST se trouvant sur la réglette, nous sommes obligés de considérer le nombre *a* comme le premier facteur du calcul. C'est ainsi que pour le produit $a \sin \alpha$, nous placerons *a* sur D ; ensuite α sera placé sur S (ou ST) et le résultat sera obtenu, soit à l'aide de 1S (index gauche de S), soit à l'aide de 10S (index droite). Si nous donnons ici les valeurs de 1 et 10 à ces index, c'est parce qu'ils se rapportent implicitement à une échelle des nombres (sinus) et non à la valeur de l'angle. On aura comme d'habitude Mp + 1 avec 10S. Quant. au Ct du produit, il découlera de celui de *a* et de celui de sin α (Mp de lecture). Tout cela est très simple et sera illustré par les exemples suivants :

Exemple : x = 18,5 x sin 15° 10’.

La règle est disposée comme l'indique la *figure 45* ; 1S est en face de 1,85 de D et le Tc sur 15° 10' de S. Le résultat lu sur D est 4,84, on a Ct = + 1 - 1 = 0, d'où x = 4,84.

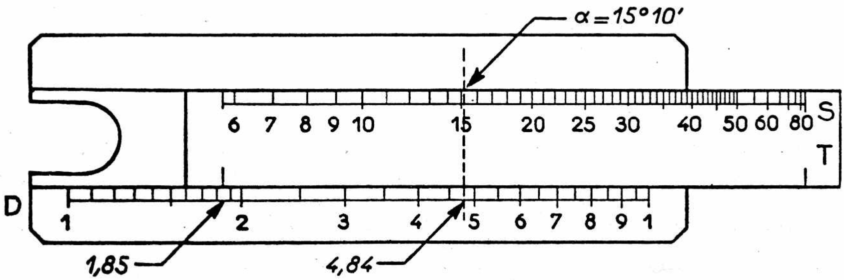

FIG. 45.

▶Soit encore x = 325 sin 37° 40'. Cette fois le produit s'effectue avec 10S, d'où Mp + 1 et Ct = + 2 - 1 = + 1. Le total + 2 nous conduit à x = 198,5.

▶Soit enfin x = 84 sin 21° 17’ pour lequel Ct = + 1 – 2 +1 = 0 d'où x = 3,35.

Pour $x = a$ sin α sin β, on effectuera deux fois le produit par un sinus, comme ci-dessus, avec un deuxième déplacement de la réglette.

▶Soit x = 285 sin 32° 10' sin 4° 30', on peut noter de suite

Ct = + 2 - 1 - 2 = - 1. La manipulation fait apparaître deux fois le Mp + 1, d'où Ct total + 1 et par suite x = 11,93.

2. - Deuxième genre : *a* tg α.

Pour cette expression, nous aurons deux cas à distinguer du fait que T, n'est graduée que jusqu'à 45°, savoir :

1er cas. - α de 35’ à 45°.

Le calcul est identique au précédent, grâce aux échelles T et ST.

Exemples :

x = 27 tg 1° 18' = 0,613 (+ 1 – 2 = - 1)
x = 535 tg 3° 17’ = 30,7 (+ 2 - 2 + 1 = + 1)
x = 75 tg 16° 25' = 22,1 (+ 1 - 1 + 1 = + 1).

2e cas. - α de 45° à 89° 25’.

Nous avons vu que pour ces angles tg α = cot (90°- α). Il s'en suit que le produit se transforme en quotient, savoir $x = \frac{a}{tg\ (90^{\circ} - \alpha)}$, celui-ci sera donc réalisé en amenant 90°- α (T ou ST) au-dessus de *a* de D et on aura bien sûr Mp -1, si la lecture se fait par 10T (index de droite).

Exemples : ►Soit x = 22,1 tg 73° 35'. Nous plaçons comme l'indique la *figure 46*, 90°- α = 16° 25' au-dessus de 2,21

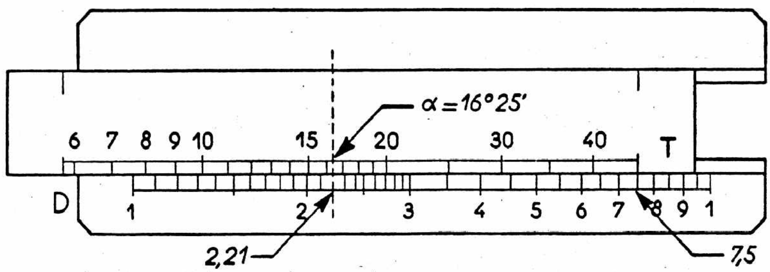

FIG. 46.

de D, d'où x = 75 puisque Ct = + 1 + 1 = + 2 et Mp -1, soit total + 1; on remarque que ce calul est l'inverse du 3e exemple précédent.

►Soit encore x = 14,2 tg 88° 45', cette fois 90°- α =1° 15' sera placé sur ST, et au-dessus de 1,42 de D.

On trouve x = 651 Ct = + 1 + 2 - 1 = + 2.

3. - Troisième genre - $a\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

Cette expression servant à la résolution d'un triangle squalène se calculera très facilement par un produit et quotient mais on a intérêt, comme toujours à déterminer a priori le Ct du quotient des sinus. On a ici trois cas possibles :

1er cas. - α et β sont lus sur la même échelle. Alors Ct = 0 de toute évidence pour S comme pour ST.

2e cas. - α est sur S et β sur ST. Autrement dit S est utilisée pour le produit *a* sin α. On a Ct = - 1 - (- 2) = + 1.

3e cas. - α est sur ST et β sur S. Autrement dit S est utilisée pour le quotient $\dfrac{a}{\sin\beta}$. On a Ct = 2 - (- 1) = - 1.

En résumé pour les deux derniers cas, c'est S qui entraîne ± 1, suivant qu'il concerne le produit ou le quotient, ce qui est facile à retenir. A ce Ct précalculé, il reste à ajouter le Ct de *a* et les Mp de l'opération (± 1), s'il y a lieu.

Exemple :

$$685\times\frac{\sin 2^{\circ}16'}{\sin 14^{\circ}40'}=107$$ (Ct = + 2 - 1 Mp + 1).

Affaiblissement sinusoïdal en décibels.

Les phénomènes suivant une loi sinusoïdale sont nombreux en physique et surtout en électronique. Les techniciens ont souvent intérêt à traduire en décibels, unités commodes, un affaiblissement résultant d'une telle loi, voyons ce que cela représente : soit une grandeur (tension ou courant) *y* telle que

y = K sin *x* ; elle aura pour valeur maximale Y = K sin 90° = K. Le rapport de la variable à ce maximum, sera donc :

donc : $r = \frac{y}{Y} = \frac{K \sin \alpha}{K} = \sin \alpha$. En appliquant ici le principe des décibels (chap. 9), on peut écrire :

r = 20 colg sin α = 20 lg cosėc α, décibels,

Le calcul de cette valeur qui semble complexe, s'effectue pourtant d'un seul coup de réglette, en conjuguant les lois de lecture de la cosécante, et des décibels de tension.

►Soit par exemple α = 35° 30'. Plaçons cet angle sur S au-dessus de 10D. Nous lisons cosėc α = 1,72 sur D en face de 1C, bien que ce soit pratiquement inutile et sur L en vis-à-vis : 236, ce qui donne - 4,72 dB pour l'affaiblissement.

►Soit encore α = 90 45', on trouve *r* = 15,42 dB.

Quand on arrive à α = 5° 45', on a *r* = 20 dB. Pour un angle plus petit, le calcul se poursuivra sur l'échelle ST de la même manière, mais au nombre des décibels fourni par la lecture de L, il convient d'ajouter : -20 dB.

Exemple : α = 1° 25', *r* = - 20 - 12,14 = 32,14 dB.

La limite inférieure de ST soit 35', correspond à - 40 dB, et il est rare qu'on aille au-delà de cette valeur, dans la pratique des mesures.

Remarque. - Signalons au lecteur bien entraîné qu'il peut simplifier la manipulation précédente,, en cherchant avec le seul Tc, la correspondance directe entre α et L, et en lisant cette échelle à reculons comme si elle était graduée de droite à gauche (0 à 10), ce qui n'est guère difficile. Cette lecture inversée revient en fait à soustraire de 1 la mantisse d'un nombre, ce qui donne bien son cologarithme, comme on l'a vu au chapitre 9.

CHAPITRE 14

AUGMENTATION DE LA PRÉCISION DANS LES CALCULS A LA RÈGLE

1. - Précision de la règle de 25 cm.

Nous avons déjà dit que la précision obtenue dans les calculs avec une règle de 25 cm est du même ordre, qu'avec l'emploi d'une table de logarithmes à trois décimales. Ceci peut s'exprimer pratiquement comme suit : lorsque le résultat tombe entre les valeurs 1 et 4 de **C** ou **D**, le troisième chiffre significatif est lu avec certitude ; par contre, pour les lectures faites au-delà de 4, l'interpolation nécessaire pour obtenir le 3^{e} chiffre peut entraîner une erreur que l'on a déjà estimé à ± 0,005.

En ce qui concerne les échelles **A** et **B**, nous savons que la précision de lecture est la moitié de la précédente.

Bien que ces précisions soient suffisantes dans la grande majorité des cas où l'on emploie une règle à calcul, il peut arriver exceptionnellement que le calcul nécessite une meilleure approximation du résultat.

Il existe des moyens simples qui permettent d'obtenir une augmentation de la précision dans les calculs et nous allons en indiquer quelques-uns.

2. - Produit de deux nombres.

En premier lieu, il faut penser que les calculs complexes effectués avec D et A ou avec D et K, peuvent devenir plus précis en les reprenant intégralement sur **CD**, carré et cube compris.

Lorsque le résultat est lu entre 1 et 4 de D, on peut fixer le quatrième chiffre en s'aidant de l'arithmétique.

Soit par *exemple :* *P* = 152 x 22, dont le résultat est à droite de la division, 3,34, d'où *P* ≈ 3 340. Au lieu de chercher le quatrième chiffre par l'inter polation, il suffit de regarder le chiffre des unités des deux facteurs, ici 2 et 2, pour pouvoir dire que le quatrième chiffre doit être 4, d'où *P* = 3,344.

Autre exemple *P* = 0,27 x 53 = 14,31, le dernier chiffre étant précisé par 7 x 3 = 21, d'où 1.

Considérons maintenant le cas où l'un des facteurs comporte plus de trois chiffres et où l'on désire un résultat exact jusqu'au cinquième ou sixième chiffre. Prenons comme exemple: *P* = 375 264 x 235 = *x*. *y*. Pour obtenir un calcul plus précis, on fera appel aux principes de l'algèbre, en posant *x* = *a* + *b*, ce qui nous conduit à *x*. *y* = *ay* + *by*, c'est ainsi que le premier facteur peut se décomposer en *a* = 375000 et *b* = 264. Le calcul devient donc :

ay = 375 000 x 235 = 88 100 000
by = 264 x 235 = <u>62100</u>
xy = 88 162 000

C'est là un résultat impossible à obtenir directement. Cependant, le premier tombant dans la région du 8 donne une interpolation. peu sûre; on a donc intérêt à éliminer ce terme en prenant une autre décomposition de *x*, faite en trois facteurs : *x* = *a* + *b* + *c*, avec *a* = 300 000, *b* = 72 200, *c* = 64, ce qui donne:

ay = 300 000 x 235 = 70 500 000
by = 75 200 x 235 = 17 670 000
cb = 64 x 235 = <u>15040</u>
xy = 88 185 040

Cette fois le résultat est excellent puisque la valeur exacte est 88 187 040 ; cela tient à la bonne lecture des deux derniers produits, faite entre 1 et 2. Cela nous indique, comment on doit conduire la décomposition pour obtenir un résultat optimal, soit en évitant des lectures partielles dans les régions peu favorables de la règle, quitte à augmenter la décomposition.

Pour terminer cette rubrique, considérons le cas de deux facteurs à grand nombre de chiffres.

Soit P = 75 283 x 3 256 = *xy*. Nous décomposerons cette fois chacun des facteurs avec :

$x = a + b$ et $y = m + n$, d'où $P = xy = am + an + bm + bn$

Nous allons ainsi poser a = 75 000, b = 283, m = 3 200, n = 56 et le calcul se présente comme suit :

am = 75 000 x	3 200 =	240 000 000	
an = 75 000 X	56 =	4 200 000	
bm = 283 x	3 200 =	905 600	
bn = 283 x	56 =	15 850	
	xy =	245 121 450	

Signalons que le quatrième chiffre de *bm* est précisé par les les unités 3 x 2 = 6,,après lecture de 9,05. Ici la décomposition a été judicieuse car le résultat exact est 245 121 448 et l'écart est très faible.

Contrairement à ce qu'il peut paraître, ce genre de calcul n'est pas plus long que fait par l'arithmétique, surtout si l'on est bien habitué à sa règle. De toute façon, il n'est envisagé qu'occasionnellement car, si c'est possible, on aura recours à une machine à calculer, plus indiquée par la précision qu'elle apporte. Par ailleurs, le procédé exposé ci-dessus reprend l'avantage sur la machine pour un produit tel que le suivant :

$P = 325{,}742\ \sqrt{522}$ par suite de l'extraction de la racine.

3. Quotient de deux nombres.

Un procédé semblable est utilisable pour un quotient.

Soit $Q = \frac{1867}{1635}$ on écrira $Q = 1 + \frac{232}{1635} = 1{,}142$. De cette façon le quatrième chiffre est une certitude que l'interpolation ne pouvait donner.

Soit encore $Q = \frac{7467}{2292} = 3 + \frac{591}{2292} = 3{,}258$. En posant le quotient, on trouve la valeur 3, d'où la décomposition qui ici donne encore exactement le quatrième chiffre **(1)**.

4. Carré d'un nombre.

Dans le cas d'un carré, nous utiliserons l'expression algébrique $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, en décomposant le nombre donné par $x = a + b$.

Exemple : x =248,65.

Le calcul détaillé nous donne avec a = 248, b = 0,65 :

$$
\begin{array}{lcr}
a^2 = 248^2 & = & 61\,500 \\
2\,ab = 2 \times 248 \times 0{,}65 & = & 322{,}4 \\
b^2 = \quad 0{,}65^2 & = & \underline{0{,}422} \\
x^2 = & & 61822{,}822 \approx 61\,823
\end{array}
$$

On voit également par cet exemple que si b est choisi petit,par rapport à a, on peut négliger le terme b^2 sans diminuer de beaucoup la précision.

On aurait ici $x^2 = 61822{,}4 \approx 61\,822$.

Ajoutons que ce procédé s'étend naturellement au cube d'un nombre, avec la formule correspondante.

5. Racine carrée d'un nombre.

Soit n le nombre donné, dont il s'agit de calculer la racine carrée, comportant 5 ou 6 chiffres. Soit x une valeur, approchée par défaut, de cette racine telle que la règle peut nous la fournir et notons par e l'écart entre x et la valeur exacte. Nous pouvons écrire :

$$n = (x+e)^2 = x^2 + 2ex + e^2 .$$

Nous pouvons par le choix de x faire en sorte que e soit petit

(1) Voir page 176 procédé avec log-log.

devant x et par suite e^2 négligeable. On peut alors, de la formule ci-dessus, tirer. ceci :

$e = \dfrac{n - x^2}{2x}$, quantité calculable à la règle et qui nous fournira une valeur $x + e$, plus précise, de la valeur cherchée.

Appliquons cet artifice de calcul à n = 64 367. On trouve très facilement avec A et D que 253^2 = 264000, d'où :

$$e = \frac{367}{(2 \times 253)} = 0{,}725$$

La racine peut donc être estimée à 253,725 avec une imprécision sur le seul dernier chiffre, vu le mode de calcul. Celui-ci étant d'ailleurs effectué par défaut, on-peut arrondir à 253,73.

Remarque. - Si le lecteur a sous la main une table des carrés des nombres de 1 à 1000 (voir aide-mémoire DUNOD), il peut appliquer le procédé indiqué avec l'assurance d'une très grande précision.

Exemple : Soit n = 278 226, la table consultée nous fournit :

$$527^2 = 277729 \quad \text{d'où} \quad e = \frac{497}{2 \times 527} = 0{,}472$$

La racine est donc 527,472 et ici on peut dire que le dernier chiffre 2 est exact à ± 0,5 près, au maximum, ce qui est une excellente approximation.

6. Racine cubique d'un nombre.

Un procédé identique au précédent peut être employé pour la racine cubique, cependant il est légèrement plus complexe, mais pas dans son application, ce qui le rend très intéressant.

Nous écrirons encore $n = (x + e)^3 = x^3 + 3ex^2 + 3e^2x + e^3$.

Ici encore, nous négligerons e^3, ce qui nous permet d'écrire $e = \dfrac{n - x^3}{3(x^2 + ex)}$. Cette formule a la même structure que la précédente mais ce qui est gênant, c'est la présence de e au dénominateur du deuxième terme. Nous allons donc éliminer *e*, pour aboutir à une première approximation, en s'appuyant sur le fait suivant : par le choix de *x*, *e* est nécessairement inférieur à une unité de la racine approchée, sinon on pourrait prendre pour celle-ci la valeur x + 1. On peut donc provisoirement donner à *e* la valeur moyenne 0,5, d'où, pour une première valeur approchée:

$e = \frac{n - x^3}{3\left(x^2 + 0{,}5x\right)}$. Ayant ainsi calculé *e*, on le portera dans la formule précédente pour calculer $e' = \frac{n - x^3}{3\left(x^2 + ex\right)}$ et une deuxième approximation, meilleure que la première donnera pour racine $x + e'$.

Appliquons ce procédé à *n* = 19 418 473, en admettant l'usage d'une table des carrés et des cubes. Celle-ci nous indique. comme racine approchée par défaut 268^3 = 19 248 832, d'où $n - x^3$ = 169 641 et 3 (x^2 + 0,5*x*) = 3 (71824 + 134) = 215 874, on en déduit $e = \frac{16964}{21587} = 1 - \frac{4623}{21587} = 1 - 0{,}214 = 0{,}786$.

La racine cubique en première approximation est donc 268,786. Pour obtenir la deuxième, nous devons augmenter le diviseur de 3 x 268 x (0,786 - 0,5) = 230, ce qui donne :

$e' = \frac{16964}{21610} = 0{,}785$. La racine devient au mieux 268,785.

On voit par cet exemple que si *e* calculé est voisin de 0,5, la correction avec *e*’ est très faible et en pratique on pourra, dans ce cas, la négliger, puisque la première approximation donne une racine à six chiffres à une unité près du dernier ordre, ce qui est excellent.

Par ailleurs, indiquons qu'en effectuant ce même calcul avec une machine à calculer, on peut obtenir la racine avec huit chiffres, dont le dernier sera encore exact à ± 1 près, ce qui justifie encore mieux l'intérêt du procédé relativement simple.

7. Sinus et tangente d'un petit angle.

Nous avons dit, au chapitre 10 que l'échelle ST relative aux angles de 35' à 5° 45' était en réalité une échelle des arcs en radians et que par conséquent, le sinus et la tangente de ces angles n'étaient obtenus que d'une manière approchée. Pour les angles supérieurs à 3°, cette approximation peut être jugée insuffisante, mais elle peut être corrigée par un calcul rapide, dont voici le principe :

En s'appuyant sur les deux premiers termes du développement en série, on peut écrire :

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} \quad \text{et} \quad tg\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$$

on voit que les termes correctifs, cube de α, sont lus en même temps que sin α (ou α radian), ce qui facilite le calcul.

Exemple : Soit α = 3° 42'. En plaçant le Tc sur cet angle de ST, on lit directement :

α = 0,064 6 α^3 = 0 000 270, d'où facilement

$\frac{\alpha^3}{3} = 0{,}0000090$ et $\frac{\alpha^3}{6} = 0{,}000045$, ce qui donne les valeurs corrigées de sin α = 0,064 555 et tg α = 0,064 690.

Il est utile de signaler que ces valeurs sont encore entachées d'une certaine erreur, provenant de la lecture de sin α sur l'échelle D. On peut donc améliorer le calcul en déterminant une valeur plus précise de l'arc en radians. Ceci sera obtenu par une simple addition, grâce au tableau figurant au formulaire (chapitre 2, 3e partie), et qui fournit les multiples en radians des arcs de 1 degré, 1 minute, et 1 seconde. On a pour le cas présent :

$$\begin{array}{rl} 3° & = 0{,}052\,360 \\ 40' & = 0{,}011\,635 \\ 2' & = \underline{0{,}000\,582} \\ \alpha = & \ \ 0{,}064\,577 \end{array}$$

En tenant compte de cette valeur exacte, on obtient maintenant sin α = 0,064 532 et tg α = 0,064 667. On peut noter que le calcul de α^3, effectué à la règle, reste entièrement valable, dans cette dernière correction.

8. Sinus d'un angle comprenant minutes et secondes.

Si l'on a à calculer sin 28° 34'43'', on s'aperçoit qu'il est difficile de pointer sur S les 34', et impossible de tenir compte des 43''. Pour obtenir une valeur aussi exacte que possible du sinus, on se servira d'une formule classique de la trigonométrie, en décomposant l'angle donné en deux autres *a* et *b*. Rappelons que l'on a :

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Le calcul du second membre sera d'ailleurs simplifié par un choix judicieux de *a* et de *b*. C'est ainsi qu'on posera *a* = 28° 30' (division exacte de S) et *b* = 4'43'', cet angle-ci nous permettant de faire cos *b* = 1, sans erreur appréciable. D'où:
sin 28° 34'43'' = sin 28° 30' + (sin 283'' x sin 61° 30') dont les différents termes sont obtenus sur la règle. soit :
sin 28° 30' = 0,477 ; sin 283'' = 283 / ρ'' = 0,001 37 et
sin 61° 30' = 0,879. Le calcul nous donne ainsi :
sin 28° 34'43'' = 0,477 + 0,001 205 = 0,478205.

Le même sinus calculé par logarithme est égal à 0,478 360, ce qui montre que la valeur obtenue à la règle est à 3/10 000 près de ce résultat, ce qui est vraiment, bien.

9. Sinus d'un angle supérieur à 70°.

Nous avons vu au chapitre 11 que l'échelle P (cosinus) permettait un calcul plus précis du sinus pour les valeurs au-dessus de 70°. Mais en l'absence de cette échelle moderne sur la règle, on peut utiliser deux procédés distincts que voici :

Premier procédé.

On se servira de la formule usuelle :

sin 2 *a* = 2 sin *a* cos *a* = 2 sin *a* . sin (90° - *a*) dont le deuxième membre est calculable rapidement, comme nous l'avons vu précédemment.

Soit :

2 *a* = 76° 24’ et sin 76° 24’ = 2 sin 38° 18' x sin 51° 48’’.

Le double produit, effectué directement, sans lire les sinus, nous donne 0,972.

Remarque. - On peut appliquer ce procédé dans le cas d'un petit angle, dont la pose sur S ou ST conduit à une interpolation peu facile.

Ainsi, pour 2 *a* = 8° 28’, on peut écrire sin 8° 28' = 2 sin 4° 14’, car ici cos 4° 14' peut être pris égal à 1 avec une erreur inférieure à 0,5 %, d'où sin 8° 28' = 0,147 6. Si l'on désire une valeur plus précise, il suffit de tenir compte de :

$\cos 4^{-}14^{'} = 1 - \frac{0{,}00544}{2} = 1 - 0{,}00272$ d’où sin 8°28’ = 0,1472.

On voit que la correction n'est que de 0.,27 %.

Deuxième procédé.

Cette fois nous écrirons : sin 2 *a* = 1 - 2 $\sin^2$ (45° - *a*).

Exemple : Soit sin 83° 46', on pose *a* = 41° 53’ et 45° - a = 3° 07'. Le produit 2 $\sin^2$ 3° 07’ est obtenu rapidement, soit 0,005 92, d'où sin 88° 46' = 0,994 08.

Le lecteur pourra peut-être juger ce dernier calcul plus agréable que le précédent, il pourra choisir à sa convenance.

DEUXIÈME PARTIE

LA RÈGLE A DOUBLE FACE

CHAPITRE 1

COMPOSITION DE LA RÈGLE A DOUBLE FACE

► Une première règle double face avait été fabriquée dès 1891 par Cox; mais sa fabrication, délicate à cette époque, la fit assez vite disparaitre. L'idée, riche en possibilités, a pu être reprise ces dernières années, avec un plein succès, grâce aux matières plastiques, stables et faciles à graver. Une telle règle moderne comprend toujours une face (recto) où sont placées toutes les échelles propres au système RIETZ, soit **A, B**, **C**, **D**, **K**, **L**, avec sur la réglette (en général) les valeurs angulaires de **S**, **T**, et **ST**. Elle possède souvent une nouvelle échelle **P** (cosinus) et quelquefois une échelle inverse **DI**. Avec cette face ont peut effectuer tous les calculs simples ou combinés, que nous avons étudiés en première partie.

► Sur la deuxième face (verso) (*fig. 47*), on retrouve à l'emplacement habituel le groupe **C**, **D** et **CI** relatif aux nombres. A la place de **A** et **B** (recto), on trouve au verso deux nouvelles échelles dites décalées (anglais : **F**olded) qui sont obtenues par décalage du 1 de l'échelle des nombres, tel que l'on trouve la valeur π au-dessus de 1 C, D et aussi de 10C, D. Ces échelles sont désignées par les lettres **CF** et **DF**. Une échelle des inverses **CIF**, située sur la réglette et obtenue avec le même principe,

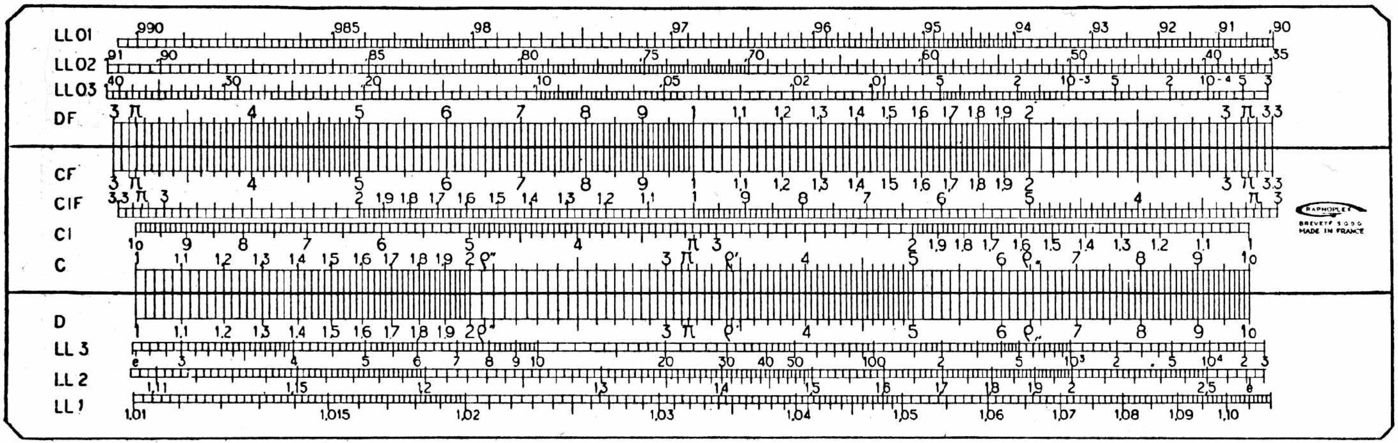

FIG. 47. — Règle double face (verso).

a donc son index 1 aligné avec 1CF, mais aussi avec π de CI. La lecture de ces trois échelles spéciales des nombres se fait, évidemment comme celle de C, D ou CI.

► Sur la surface restant disponible du corps de la règle, on, a pu placer, en bas trois échelles de graduations log - log, correspondant à l'ensemble des valeurs allant de 1,01 à 10 000 (10^5) ; et en haut trois échelles de même définition pour l'ensemble des valeurs allant de 0,000 01 (10^{-5}) à 0,99. On reconnaît que ces dernières sont en fait les inverses des précédentes, c'est pourquoi leur numérotation sur la règle est en chiffres rouges, pour attirer l'attention sur leur lecture, qui doit se faire de droite à gauche.

► A côté de cette règle double face, d'usage général, on en trouve une autre plus spécialisée, puisqu'elle comporte à son recto, trois échelles prévues pour le calcul direct des lignes hyperboliques. Nous en traiterons dans un chapitre suivant du fait que ces échelles ont une grande importance dès que l'on doit effectuer des calculs vectoriels. Elles facilitent considérablement l'usage des grandeurs imaginaires, relatives aux fonctions circulaires ou hyperboliques, et nous en donnerons quelques exemples typiques.

► Le curseur de la règle à double face comporte au milieu de son recto et de son verso, le trait central servant à la correspondance de toutes les échelles et permet, ce qui est important, le passage d'une face à l'autre. C'est ainsi que tout calcul commencé sur le recto peut être poursuivi sur le verso, ou vice-versa. Au recto du curseur, on trouve également les deux traits-repère destinés au calcul des surfaces et quelquefois un autre trait, relatif à l'échelle des carrés, dont la valeur 0,736 sert à la conversion de chevaux-vapeur en. kilowatts, et réciproquement. Au verso, un trait-repère relatif aux échelles décalées, permet certains calculs directs dont nous parlerons plus loin.

► Voyons maintenant ce qu'on peut attendre de l'emploi de ces trois groupes d'échelles.

CHAPITRE 2

EMPLOI DES ÉCHELLES DÉCALÉES

Sur la règle BEGHIN, les échelles décalées étaient obtenues par un décalage de $\sqrt{10} = 3{,}6$ de l'index 1. De ce fait cette valeur se trouvait sur DF en face de 1D et sur D en face de 1DF. Sur les règles à double face modernes, on a adopté un décalage de valeur π (3,14) voisine de la précédente mais plus usuelle dans les calculs. On a donc bien π de DF en face de 1D, mais 1 DF n'est pas en face de π de D, mais de 10 / π = 3,18 comme on peut le vérifier.

Cette échelle des nombres DF est ainsi véritablement graduée de 3 à 36, et l'index 1DF central a pour vraie valeur 10, malgré la désignation choisie, pour raison de simplicité. Par principe de la méthode, et par analogie avec l'échelle des carrés, nous affecterons à sa lecture les Mp de 0 pour la première moitié gauche : DF 3 et de + 1 pour celle de droite : DF 36. Cette convention, ici encore, nous évitera toute erreur possible, dans les calculs avec DF que nous allons maintenant étudier.

1. Calcul de π *x*.

La disposition de DF par rapport à D, nous fournit, avec le seul emploi du Tc, la lecture directe du produit π *x* sur DF, avec les Mp indiqués : 0 et + 1. Pour un nombre quelconque, on ajoutera, bien sûr, le Ct de *x*.

Exemples : 1,8 π = 5,66 5,7 π = 17,9 et 0,43 π =1,35.

2. Calcul de 3,6 x.

Le curseur est muni à droite du trait central, d'un trait repère qui se trouve placé sur 3,6 de DF quand le Tc est sur 1D. Le produit 3,6 x est donc obtenu directement sous ce repère quand le Tc est sur x de D avec les mêmes Mp que ci-dessus.

On remarquera que pour éviter une lecture hors règle vers la droite, on a parfois étendu la graduation de DF jusqu'à 36, valeur obtenue pour le Tc sur 10D.

Nous citerons quatre applications principales de ce produit particulier, savoir :

►**1°** La conversion des heures (D) en secondes (DF) ou mieux, celle des centièmes d'heure (ch), unités utilisées pour les temps de fabrication, en secondes (Mp + 1 et + 2).
Ainsi : 7 ch = 252 s et 24 eh = 865 s.

►**2°** La conversion d'une vitesse en mètres par seconde (D) en kilomètres par heure (DF - Mp 0 + 1); ainsi 18 m/s = 68,5 km/h et 49 m/s = 162 km/h.

►**3°** La conversion d'un nombre de jours (DF + 1 + 2) en fraction d'année (D - 1), celle-ci étant comptée, dans les calculs d'intérêts, de 360 jours ; ainsi 220 jours = 0,61 an.

►**4°** La conversion d'un angle en secondes sexagésimales (DF) en millièmes de degrés (D) ; ainsi 70" = 0,019 4°, 156'' = 0,044 4°.

Naturellement, à ces quatre applications s'ajoutent les quatre conversions réciproques, faciles à obtenir.

3. Calcul de $\frac{x}{\pi}$ et $\frac{x}{3{,}6}$.

Le calcul de ces deux quotients se déduit des deux précédents produits. x sera placé sur DF avec Tc (ou trait-repère) et le quotient sera lu sur D. Les Mp 0 et + 1 du produit deviennent 0 et - 1 pour la lecture, suivant que x est placé sur DF3 ou DF36.

Exemples :

$x = 0{,}25$ $\quad Q_1 = 0{,}079\ 5$ (Ct - 1 et Mp - 1, total - 2)
$\quad Q_2 = 0{,}069\ 4$ (Ct - 1 et Mp - 1, total - 2).

4. Calcul de $\frac{1}{\pi x}$ et $\frac{1}{3{,}6x}$.

Ces deux expressions sont les inverses des produits ci-dessus et leurs valeurs se liront donc directement sur CIF à partir de *x* de D. Les Mp sont - 1 pour la moitié gauche de CIF et - 2 pour la droite, et on ajoutera - Ct de *x*, pour un nombre quelconque.

Exemple : $x = 0{,}65, \frac{1}{\pi x} = 0{,}49$ Ct – (-1) – 2 = -1

5. Calcul de $\frac{\pi}{x}$ et $\frac{3{,}6}{x}$

Cette fois on reconnaît dans ces expressions les inverses des quotients vus au § 3. Il suffit donc de placer *x* sur DF, pour lire leurs valeurs sur CI avec les Mp de - 1 pour *x* placé sur DF3 et 0 sur DF36 avec toujours - Ct de *x* pour un nombre quelconque.

Exemple :

1 degré = $\frac{\pi}{180^{-}}$ =0,01745 rd ; - (+2) + 0 = - 2.

6. Calculs combinés avec DF et A.

On peut profiter de la correspondance possible d'une face à l'autre de la règle, pour calculer directement, avec le seul Tc, des expressions contenant des carrés ou racines carrées, voire des cubes ou racines cubiques. Nous laisserons au lecteur le soin d'étudier les différents cas possibles et de fixer les Mp correspondants par application de ce qu'il sait déjà.

Mentionnons seulement quelques expressions pouvant être rencontrées :

$$\pi\sqrt{x} \quad et \quad \frac{1}{\pi\sqrt{x}} \qquad \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \qquad \frac{1}{\pi^2 x^2} \quad \text{etc.}$$

En dehors de tous, les calculs précédents, pour lesquels les échelles décalées sont d'une commodité indéniable, il faut ajouter que les produits et quotients sont effectués avec beaucoup plus d'agrément grâce à DF, CF et CIF, à tel point que la face contenant ces échelles devient la principale face de travail, d'autant plus que l'on peut toujours l'utiliser en combinaison avec l'autre face. C'est ainsi que les lignes trigonométriquies et les racines carrées ou cubiques peuvent se ramener sur les échelles C ou D du verso pour un calcul poursuivi avec CF et DF.

Nous allons maintenant étudier ce que la méthode des coefficients nous apporte pour l'emploi général des échelles décalées.

7. Calcul d'un produit avec CF, DF.

Envisageons d'effectuer le produit $P = 2x$ avec les échelles habituelles C et D, en plaçant par conséquent 1C sur 2. Nous constatons, comme déjà,vu en première partie, que *P* peut se lire sur D pour *x* compris entre 1 et 5, et qu'au-delà de cette valeur, *P* se trouve hors règle (RIETZ). Si nous regardons les échelles décalées, nous voyons que 1CF est également en face de 2 de DF, ce qui fait que ces deux échelles sont en position analogue à C et D, lorsqu'on décale la réglette pour amener 10C sur 2. Ceci nous permet donc de trouver *P* = 2 x 7, par exemple, sur DF, soit 1,4 avec Mp + 1, donc en vraie valeur 14. On voit qu'ici le Mp de lecture de DF36 remplace celui qu'entraînait l'emploi de 10C, ce qui semble très normal.

Poursuivons l'étude, en constatant que *P* = 2 x 4 peut se lire non seulement sur D, mais aussi sur DF, et comme *P* = 8 est cette fois sur DF3, on a Mp = 0, en concordance avec la, lecture sur D. Cet examen nous permet de conclure que tous les produits hors règles de C, D sont reportés en lecture possible sur DF, entre 1DF et 1CF avec le Mp + 1, ce que nous concrétiserons par la loi suivante :

Première loi. - Tout produit lu entre les index, à droite de,1DF, est affecté du Mp + 1 (propre à DF36).

Nous ferons observer que cette loi aurait pu être donnée pour les produits effectués avec C et D, car lorsque 10C est sur 2 de D, le produit est lu entre 1D et 10C, ce qui est bien comparable, puisque 1CF et 10CF ne font qu'un. Cependant, nous conserverons la loi connue de ±1 pour index 10, pour C et D parce qu'elle est plus simple dans son application.

Plaçons maintenant 10C sur 5, comme pour rendre possibles les produits hors règle de la disposition précédente. Cette fois *P* est hors règle à gauche pour *P* = 5 *x* et *x* compris entre 1 et 2. Nous les retrouverons à nouveau sur DF entre 1CF et 1 DF et avec Mp = 0, puisque la lecture se fait sur DF3, d'où :

Deuxième loi. - Tout produit lu entre les index, à gauche de 1DF est en lecture directe, Mp 0 (propre à DF3).

Nous pouvons bien entendu condenser les deux lois en une seule.

Loi du produit avec CF, DF. - Les produits lus entre les index sont affectés du Mp propres à DF; soit 0 à gauche, et + 1 à droite de DF.

Ceci sous-entend que pour les produits extérieurs aux index on a le Mp contraire, soit + 1, si 1CF est à gauche de 1DF et 0, s'il est à droite. Mais nous remarquons que cela n'est pas à retenir particulièrement, car ces derniers produits se lisent également sur D, ce qui nous permet de fixer leurs Mp suivant l'index en jeu: 1C ou 10C.

8. Calcul d'un produit avec CIF, DF.

L'étude du produit effectué avec CIF, DF conduit à des conclusions analogues aux précédentes, que l'on peut présenter ainsi :

Plaçons d'abord 1CIF sur 1,8 de DF; cette disposition réalise de nombreux produits formant trois catégories, savoir :

►1° Ceux qui sont posés entre les index, comme 1,2 x 1,5 et pour lesquels on a Mp = 0.

►2° Ceux qui sont posés à gauche de 1DF comme 9 x 2 et pour lesquels on a Mp = + 1.

►3° Ceux qui sont posés à droite de 1CF comme 3 x 6 et pour lesquels on a aussi Mp = + 1.

Cette fois le Mp pour un produit posé entre les index est l'inverse de celui de l'échelle DF36, mais ces produits correspondent encore au cas hors règle (droite) de CI et D, comme on peut le vérifier.

Plaçons maintenant 1CIF sur 6 de DF, ce qui réalise les produits suivants :

►1° Produits posés entre index, tels que 8 x 7,5 pour lesquels Mp = + 1.

►2° Produits extérieurs aux index tels que 5 x 1,2 à gauche et 1,5 x 4 à droite pour lesquels Mp = 0.

Nous avons encore pour un produit posé entre index un Mp inverse de celui de DF et la correspondance avec ceux hors règle (gauche) de CI et D, d'où finalement :

Loi du produit avec CIF, DF. - Les produits posés entre les index sont affectés d'un Mp inverse de celui de DF, soit + 1 à gauche et 0 à droite de 1DF.

Cette loi pourrait aussi s'appliquer aux produits faits avec CI, D, comme on peut le contrôler aisément ; en outre, on peut préciser que l'inversion des Mp de DF correspond à l'inversion d 'emplacement des index 1CI et 10CI avec 1C et 10C.

9. Calcul d'un quotient avec CF ou CIF et DF

Puisque la loi d'un quotient découle toujours de celle d'un produit, nous la formulerons directement, en laissant au lecteur le soin de la vérifier :

1° Quotient avec CF, DF.

Tout quotient posé entre les index est affecté d'un Mp égal à celui de DF propre au quotient (par π), soit 0 à gauche de 1DF et - 1 à droite.

C'est on le voit la loi du produit au signe près du Mp relatif à DF36.

2° Quotient avec CIF, DF.

Tout quotient lu entre les index est affecté d'un Mp inverse à celui de DF, soit - 1 à gauche et 0 à droite de 1DF. Même remarque que ci-dessus. Ajoutons qu'ici encore, les quotients posés ou lu extérieurement aux index se lisent à la fois sur DF et sur D, ce qui facilite la fixation du Mp.

10. Conclusion - Produits et quotients.

Après l'étude séparée des quatre sortes de calcul possibles avec les échelles décalées, on peut résumer tout ce qui a été dit sur les Mp en une seule et unique loi.

Loi générale pour CF, DF (ou CIF, DF). - Tout produit lu ou quotient posé sur CF, DF, entre les index, est affecté du Mp de l'échelle DF, soit dans l'ordre (gauche- droite) 0 et ± 1.

Tout produit posé ou quotient lu sur CIF, DF, entre les index, est affecté d'un Mp inverse, soit dans l'ordre ± 1 et 0.

Insistons sur le fait que ces deux lois réciproques sont tout ce qu'il y a à retenir, puisque les autres cas sont calculables avec C, D ou CI, D où la loi ± 1 pour index 10 continue à s'appliquer.

La formule lapidaire de ces échelles est donc : Mp de DF pour *P* et *Q* entre index avec CF et Mp inverse avec CIF. Elle n'est guère plus difficile à retenir que celle de C, D, et les valeurs de base 0 et + 1 sont évidentes, par la seule lecture de DF faite de 3 à 36.

Emploi rationnel des échelles décalées. - Les échelles C, CI et D procuraient deux moyens pour effectuer un produit ou un quotient. Maintenant CF, CIF et DF ajoutent encore deux autres moyens pour chaque-calcul ; cela au lieu d'aider le lecteur, pourrait le rendre perplexe et le faire hésiter dans la conduite de son calcul. Aussi croyons-nous utile de le guider, dans ses débuts, par un conseil pratique qui lui permettra d'obtenir de sa règle moderne tout le bénéfice de rapidité et de sûreté, qu'il en attend.

L'emploi des échelles décalées, pour un calcul complexe, comprenant produits et quotients, doit être strictement limité à la suppression des lectures hors règle, des opérations faites avec C et D (ou CI, D). Ce point de vue nous amène à conseiller le maniement de la règle comme suit :

Commencer le calcul sur D, dans tous les cas, produit ou quotient, avec C ou CI. Dès que l'on arrive à une lecture hors règle, prendre le résultat sur DF, alors qu'on le trouvera **obligatoirement** entre les index. Continuer sur DF, avec les produits ou quotients suivants, mais revenir sur D au **premier** cas possible (hors index). Poursuivre ensuite, de la même manière cyclique.

En opérant ainsi, on n'effectue sur DF, que des produits ou quotients situés entre les index, pour lesquels on appliquera la loi énoncée ci-dessus ; tous les autres calculs auront lieu sur D, avec la loi habituelle, ce qui évitera certainement des erreurs de Mp.

En s'entrainant à ce maniement rationnel de la règle, le lecteur arrivera assez vite à une grande-fapidité de calcul et trouvera que les lois de Mp sont d'une application plus simple qu'on puisse le penser, a priori. Ce qui reste certain, c'est que sans cette méthode des coefficients, il est dîfficile de s'en sortir sans erreur, car le passage de D à DF et vice-versa fait perdre toute possibilité d'estimation de l'ordre de grandeur du résultat. Par ailleurs ne pas se servir des échelles décalées et en perdre l'avantage serait une grande maladresse.

Enfin, pour aider sa mémoire à enregistrer la loi des Mp, le débutant pourra, pendant quelque temps, inscrire en haut de sa feuille de calcul ceci :

DF, CF : 0 | ±1 et CIF : ± 1 | 0, qui concrétise bien la place et la valeur de tous les Mp nécessaires.

11. Quelques applications particulières.

Nous allons indiquer maintenant quelques cas particuliers où l'emploi des échelles décalées est véritablement avantageux, par la simplification qu'il procure dans les calculs.

1° Emploi spécial de CF, DF.

► En dehors de l'emploi, rationnel conseillé précédemment on peut, évidemment utiliser ces échelles autrement pour obtenir un maniement plus agréable de la réglette, et ceci, lorsqu'on doit effectuer un seul produit ou quotient, ceux-ci pouvant d'ailleurs constituer le début d'un calcul complexe.

► Considérons d'abord le produit *P* = 2,27 x 6,65. Nous pouvons l'obtenir avec une meilleure position de la réglette, en se servant conjointement de CF et D ; soit en plaçant 1CF sur 2,27 de D, puis le Tc sur 6,65 de CF, le résultat est alors lu sur D : 1,51. Pour fixer le Mp, on doit considérer chaque moitié de CF comme une partie d'échelle C, c'est-à-dire que le produit étant effectué ici avec 10CF, on a Mp = + 1, ce qui donne *P* = 15,1.

► De même *P* = 2,27 x 1,82 obtenu avec la même disposition donne *P* = 4,13, puisque cette fois, c'est 1CF qui est en jeu.

► Posons maintenant *P* = 4,35 x 3,68 et effectuons le calcul. avec DF et C. Amenons 1C sous 4,35 de DF et le Tc sur 3,68 de C. Le produit lu sur DF36 est *P* = 16. Ici c'est le Mp + 1 de cette échelle qui s'applique au produit, très naturellement. .

► On pourra également, et sans difficulté, poser un quotient soit sur CF, D, soit sur DF, C, le groupe de travail étant indiqué par les valeurs respectives des données.

2° Quatrième proportionnelle.

Les trois problèmes étudiés au chapitre 3 (§ 2), ainsi que toutes les conversions analogues signalées, bénéficient de la suppression du hors règle, grâce à CF, DF. Une seule position, de la réglette correspondant à la pose du quotient *a*/*b* suffira donc pour obtenir toutes les valeurs cherchées.

On peut citer comme exemple, là conversion des fréquences en longueurs d'ondes, obtenue très agréablement avec CIF et D en plaçant 1CIF en face de 3 de D. On dispose ainsi de toute la longueur de D pour placer F (ou L) et de toute celle de CIF pour y lire L (ou F).

3° Calcul de $x\,y = n$.

Ce calcul particulier étudié au chapitre 7 (§ 1.1) peut être repris de la même manière, mais aux valeurs obtenues; sur, D et CI, s'ajouteront celles complémentaires lues sur DF et CIF. Mais ici, il faut faire attention à ce que ces dernières lectures, correspondant au hors règle, sont faites entre les index, soit avec un Mp + 1 pour le produit *xy*. Ceci entraîne, pour *n* compris entre 1 et 10, à un Mp - 1 pour *x* (ou *y*) lu sur DF (ou CIF).

Exemple :

n = 5. On a sur CI-D : 2 x 2 5; 2,7 x 1,85
4 x 1,25, etc..
et sur CIF-DF: 5,5 x 0,9; 6,25 x 0,8
7,5 x 0,666, etc.

4° Racines d'ordre pair.

Nous avons vu au même chapitre 7 que la manipulation précédente faite en posant *y* = *x* fournissait un moyen de calcul de $x = \sqrt{n}$, en posant *n* sur D et en outre de $x = \sqrt[4]{n}$ en posant *n* sur A, ou de $x = \sqrt[6]{n}$, avec n sur K.

L'emploi de CIF, DF simplifie encore ces, trois calculs.

Ainsi pour les racines carrées, il suffit de placer 1CI sur *n* de D pour obtenir d'une part $\sqrt{n}$ sur CI, D, et d'autre part $\sqrt{10n}$ sur CIF, D. Une seule position de réglette donne donc en même temps la racine d'un nombre de 1 chiffre et celle du même nombre à 2 chiffres.

Vérifier avec $\sqrt{4,5} = 2,2$ et $\sqrt{45} = 6,71$.

De la même façon, en posant *n* sur A, on obtiendra sur CI, D les racines quatrièmes des nombres de 1 à 100 et sur CIF, DF celles des nombres de 100 à 10 000 $\left(\sqrt[4]{100n}\right)$

Exemple : $\sqrt[4]{23} = 2,19$ et $\sqrt[4]{2300} = 6,925$.

Enfin, en posant *n* sur K, on obtient sur CI, D les racines sixièmes pour *n* de 1 à 1000 et sur CIF, DF, celles pour *n* de 10^3 à 10^6 ; $\left(\sqrt[6]{1000n}\right)$.

Exemple : $\sqrt[6]{154} = 2,315$ et $\sqrt[6]{154000} = 7,325$.

On a pu remarquer que l'on passe de la racine lue sur D à celle lue sur DF par un très petit décalage du Tc vers la droite; on peut chiffrer celui-ci, car il correspond à la valeur du quotient $\frac{\sqrt{10}}{\pi} = 1,006585$ et on peut ajouter que pour la règle **BEGHIN** où le décalage des échelles est basé sur la valeur $\sqrt{10}$, le Tc serait exactement sur les deux racines.

12. Intérêt des échelles inverses.

On pourrait penser que l'emploi des échelles CF, DF enlève de l'intérêt à celui de l'échelle des inverses (CI). Il n'en est rien, puisqu'au contraire, celle-ci voit son efficacité accrue par celle décalée CIF. Ceci sera mis en lumière, en reprenant le calcul d''un double produit, exposé au chapitre 4, § 5, et effectué avec CI et D. Alors qu'avec ces trois échelles le calcul en un seul coup de réglette n'était possible que pour des valeurs favorables des facteurs, il devient toujours réalisable, grâce aux échelles décalées.

Considérons en effet le produit P = 3,7 x 4,6 x 7,8. En posant sur CI et D, les deux premiers facteurs, on voit que le produit par 7,8 tombe hors règle (RIETZ) mais se retrouve sur DF, soit 1,328. On a Mp + 1 pour chacun des produits, d'où P = 132,8.

Supposons maintenant un quadruple produit:

$$P = 3{,}7 \times 4{,}6 \times 7{,}8 \times 1{,}8 \times 2{,}2.$$

On peut appliquer deux fois le procédé précédent, c'est-à-dire, ayant fixé le résultat partiel 1,328 avec le Tc, placer d'abord 1,8 sur CIF, puis 2,2 reporté sur C, pour obtenir finalement P = 525 (lecture sur D).

L'emploi des échelles inverses, combiné avec celui des échelles décalées, permet donc de faire les quatre produits en deux coups de réglette, donc très rapidement. et avec plus de précision.

Cet exemple doit prouver au lecteur que pour la règle double face, comme pour la RIETZ, il est indispensable d'acquérir la même habilité de maniement pour toutes les formes de calcul et pour l'emploi de toutes les échelles, indistinctement.

L'usager d'une telle règle peut être assuré, qu'avec un entraînement méthodique et une application stricte des lois de cette méthode, tout devient assez vite une simple routine, qu'il doit même acquérir sans difficulté réelle, et pour sa satisfaction future.

CHAPITRE 3

EMPLOI DES ÉCHELLES LOG-LOG

La règle dite « Electro » comportait deux échelles log - log dont le principe datait de 1815. Aujourd'hui la règle à double face en contient six, toutes d'une utilité indéniable, car les valeurs exponentielles, tant positives que négatives, se rencontrent journellement dans les domaines de l'électronique et de la physique nucléaire. Nous allons voir que la méthode des coefficients, toujours très simple dans son application, est ici encore d'une sûreté absolue, mais aussi indispensable, car estimer la grandeur approximative d'une exponentielle devient pratiquement impossible.

1. Principe des échelles log - log.

Le principe des échelles log - log découle de celui de la règle appliqué, en quelque sorte, au second degré. En effet, pour arriver à calculer : $y = a^x$, on écrira d'abord lg $y = x$ lg a, puis lglg y = lg x + lglg a. Cette expression nous indique que si l'on dispose d'une échelle graduée proportionnellement à lglg a, on peut par addition de la longueur « lg x », trouver une longueur correspondant à lglg y, donc aussi y. Comme la deuxième longueur « lg x » n'est autre que l'échelle des nombres C ou D, il suffit de lui adjoindre la première, pour réaliser le moyen de calcul cherché. Voyons en détail comment une telle échelle a été calculée.

2. Graduations des échelles log - log.

Pour bien comprendre le fonctionnement de ces échelles, il est nécessaire en effet de dire un mot sur la façon dont elles sont obtenues et graduées. Nous avons dit que l'échelle D était graduée proportionnellement au logarithme du nombre inscrit. Pour situer, par exemple, la valeur 4, il suffit de chercher lg 4 = 0,602, ce qui avec une longueur d'échelle désirée de 250 mm, nous conduit à 0,602 x 250 = 150 mm. Le trait pour 4, sera donc à cette distance à droite de 1D.

On peut aussi prendre colg 4 = - 0,398 pour trouver que le trait est à -0,398 x 250 = - 100 mm, soit à cette distance vers la gauche de 10D.

C'est à un calcul de la sorte qu'on aboutit pour l'échelle log - log. En effet, cherchons la place de la division 2,5. Nous avons lg 2,5 = 0,398, puis lglg 2,5 = lg 0,398 = - 0,400. Ceci nous indique que pour la longueur de base : 250 mm, le trait sera à 0,4 x 250 = 100 mm à gauche de 10, point de départ (lglg 10 = 0). Calculons de même plusieurs autres longueurs, pour plusieurs traits à placer, ce qui est résumé dans le tableau ci-après :

x	**lg *x***	**lglg *x***	**mm**
10	1	0	0
7	0,845	- 0,0737	- 18,43
4	0,602	- 0,2204	- 55,01
2,5	0,398	- 0,4000	- 10000
1,5	0,176	- 0,7545	- 188,50
1,1	0,0414	- 1,3830	- 354,75
1,01	0,00432	- 2,3645	- 591,13

On peut observer que plus *x* se rapproche de 1, plus la longueur s'accroit rapidement, l'échelle se dilate donc vers la gauche et ceci sans limite puisque pour *x* = 1, le log-log est infini. Pour x = 1,01, on a déjà plus de deux fois la longueur de D, d'où la nécessité de tronçonner cette échelle pour la placer sur la règle. En outre on est libre de choisir, pour la placer en face de 1D, n'importe quelle valeur de *x*. Mais il en est une, d'une importance primordiale, dans les calculs ,exponentiels c'est e = 2,718 281 828 4, c'est donc elle que l'on a intérêt à situer face à 1D, et par suite, aussi face à 10D pour un deuxième tronçon. Celui-ci ira jusqu'à 1,105 pour 1D, valeur qui correspond à la racine dixième de e, comme on le verra plus loin. Un troisième tronçon repartira de cette même valeur sous 10D pour se terminer à 1,01 sous 1D.

Nous avons ainsi obtenu les deux échelles LL1 et LL2, mais seulement une petite longueur de LL3 (90 mm) allant de 2,7 à 10. Sur la distance restant libre, on peut donc continuer à placer des valeurs de *x*, mais supérieures à 10. Calculons comme ci-dessus, la place des divisions des puissances successives de 10, comme l'indique le tableau suivant :

x	**lg *x***	**lglg *x***	**mm**
10	1	0	0
10^2	2	0,301	+ 75,25
10^3	3	0,477	+ 119,00
10^4	4	0,602	+ 150,50
10^5	5	0,699	+ 174,75

On voit cette fois que l'échelle se contracte de plus en plus vers la droite, et que l'on peut aller jusqu'à poser 10^5 à environ 15 mm à droite de 10D. En conclusion, les trois échelles loglog forment ensemble une échelle allant de 1,01 à 10 000 et il est à remarquer que les valeurs inscrites sur la règle sont toutes en vraie grandeur, donc en lecture directe.

Par un calcul analogue on obtient facilement les trois autres échelles LL01, LL02 et LL03 qui vont de 10^{-5} à 0,99, avec une lecture de droite à gauche, car les valeurs inscrites sont les inverses de celles en vis-à-vis sur les trois premières échelles , puisqu'une exponentielle négative est l'inverse de la même positive.

Du fait que toutes les valeurs sont lues en vraie grandeur sur toutes les échelles log - log, le problème n'est plus de trouver la place exacte de la virgule, pour le résultat du calcul, mais de savoir sur quelle échelle on doit lire ce résultat. C'est ce que la méthode des coefficients va nous indiquer avec précision ; faute de cela, une erreur d'échelle correspond dans le calcul à une erreur très importante, car au lieu de lire *x*, vrai résultat, on peut lire x^{10} ou x^{100} aussi bien que x^{-10} et x^{-100} et c'est évidemment plus grave qu'une erreur à 10 *n* près sur un produit.

3. Puissance du nombre e.

Par suite de l'alignement de la valeur e avec 1D, l'addition des longueurs lg *x* et lglg e est obtenue en permanence règle fermée, et avec le seul déplacement du Tc, on peut calculer e^x. Le résultat est obtenu par lecture sur LL3, directement en face de *x* sur D.

Exemples : $e^{2,6} = 13,5$ $e^{5,3} = 200$, etc..

A la limite de D, on lira $e^{10} = 22\ 000$. De la même façon, la valeur 1,105 qui se trouve sur LL2 et sous 1D est telle que $1,10^{10} = e$, puisque cette valeur (e) est aussi sous 10D par principe de l'échelle, mais si on remarque qu'elle est aussi sur LL3 en face de 1,105, on peut conclure que toute valeur de LL3 est la puissance de 10 de celle correspondante de LL2 et que cette dernière est donc égale à $e^{0,1x}$, comme c'est d'ailleurs marqué sur la règle. Enfin, pour LL1, on trouve de même que chaque division représente $e^{0,01x}$.

Maintenant si l'exposant est négatif, la lecture se fera sur les échelles inverses, soit LL01, pour $e^{-0,01x}$ puis LL02 pour $e^{-0,1x}$ et LL03 pour e^{-x}. on remarque que pour cette valeur e tous les calculs sont lus directement sans ambiguïté : les puissances entières sur LL3, les décimales sur LL2 et les centésimales sur LL1 ; on peut donc dans ce cas se passer de toute méthode sans risquer de se tromper.Il en sera de même pour toutes les racines du même nombre e.

Exercice n° 25

a) $e^{1,9}$ b) $e^{3,2}$ c) $e^{5,6}$ d) $e^{0,25}$ f) $e^{0,042}$
g) $e^{-1,35}$ h) $e^{-5,1}$ i) $e^{-0,73}$ j)$e^{-0,26}$ k) $e^{-0,0194}$

4. Racines du nombre e.

Toutes les racines de e s'obtiennent également, règle fermée, par lecture directe sous le Tc. On sait en effet que $\sqrt[x]{e} = e^{\frac{1}{x}}$. Nous ferons donc en fait le calcul d'une puissance avec exposant inverse de *x* en posant tout simplement *x* sur CI. Comme e se trouve sur LL2 sous 10D, c'est sur cette échelle qu'on pourra lire toutes les racines d'indice compris entre 1 et 10, puis sur LL1, celles d'indice compris entre 10 et 100. Quant aux racines d'indice négatif, on les lira de même sur LL02 ou LL01, sans difficulté.

Exemples : $\sqrt[3,5]{e} = 1,33$ $\sqrt[24]{e} = 1,0425$ $\sqrt[-5]{e} = 0,8185$

5. Logarithmes népériens.

A l'expression $y = e^x$ correspond la réciproque suivante: x = In *y* (In = logarithme népérien). La règle est donc un moyen commode de calcul pour In, puisqu'il se lit sur D en plaçant le Tc sur *y* de LL. Pour *y* supérieur à e, In est supérieur à 1, c'est donc le cas pour toutes les valeurs de LL3. Pour celles de LL2, In sera compris entre 0,1 et 1 et pour celles de LL1, In est entre 0,01 et 0,1. Ainsi In 63 = 4,15 et In 1,31 = 0,27, etc...

Si on place *y* sur les échelles négatives, les In sont lus comme ci-dessus mais sont affectées du signe moins. Ainsi :

In 0,23 = - 1,47, puis In 0,77 = - 0,261 et In 0,967 5 = 0,033.

6. Puissances d'un nombre quelconque.

Pour passer du calcul privilégié de $y = e^x$ à celui plus général de $y = a^x$, il nous suffit de donner à l'échelle C mobile une disposition analogue à la précédente, c'est-à-dire amener 1C sur *a* de LL pour réaliser l'addition des longueurs, en plaçant *x* sur C. En opérant ainsi pour y = $1{,}25^{2{,}9}$, nous trouvons *y* = 1,91 sur LL2. Mais cette fois nous pouvons avoir une lecture hors règle, ce qui était impossible avec les puissances de e. En effet, y = $1{,}25^{7}$, ne peut être lu.

Nous allons lever cette impossibilité en amenant 10C sur 1,25 de LL2, comme s'il s'agissait d'un produit. Mais cet emploi de 10C nous conduit à lire le résultat sur LL3, soit *y* = 4,77, puisque cette échelle est la suite de LL2, qui nous manquait ci-dessus pour lire le résultat.

On comprend maintenant que dans le cas général, on peut partir de *a* sur une certaine échelle LL pour aboutir à un résultat à lire sur n'importe quelle autre, et il est indispensable de ne pas se tromper. Voyons donc comment la méthode des coefficients va nous permettre de résoudre ce problème.

Nous avons dit au début de ce chapitre que l'échelle log - log réalisait le principe de la règle au second degré : nous allons faire de même en transposant notre méthode au degré supérieur. Qu'est-ce à dire ? Que les Ct etMp que nous allons mettre en jeu vont être relatifs, non plus à des facteurs du calcul, mais à son exposant, qui est *x*.

Nous savons qu'en plaçant *a* sur LL1, nous pouvons lire a^{10} sur LL2 et a^{100} sur LL3. Les Ct des deux exposants sont 1 et 2 et nous remarquons que le résultat (puissance) est justement lu sur une échelle dont l'indice est supérieur de 1 et 2 points à celui de LL1. Nous allons donc prendre l'indice de cette échelle **(1)** comme Ct de *a*. Pour savoir où nous devons lire $y = a^{10}$, nous ajoutons le Ct de 10 = 1, à celui de *a*, ce qui -donne 2, et ce chiffre nous donne l'échelle désirée LL2, ce qui est bien exact. De même $y = a^{100}$, Ct = 2 + 1 = 3, conduit à LL3 pour lire *y*. Mais tout ce que nous venons de dire ne reste vrai que si *y* est obtenu en plaçant 1C sur *a*. Si comme dans l'exemple ci-dessus, nous sommes obligés de prendre 10,C, nous tiendrons compte du Mp + 1 qui s'ajoutera au Ct défini auparavant. Ainsi pour $1,25^7$, le Ct de *a* est 2 (LL2), celui de l'exposant est zéro (7), avec le Mp + 1, nous obtenons 3, c'est donc sur LL3 qu'on lira *y*, comme on l'a déjà trouvé.

On admettra que le procédé ainsi exposé est fort simple, mais il peut paraître mystérieux; en fait, il suit très logiquement l'esprit de la méthode comme nous allons le montrer. Si nous reprenons la formule de base: lglg *y* = lg *x* + lglg *a*, on voit que le Ct de *x* n'est autre que lg *x*; le Ct de a est aussi lglg *a*, car il caractérise bien la puissance de 10 à laquelle appartient l'échelle où on place le facteur *a*; dès lors l'addition des deux termes donne bien le rang de l'échelle de lecture symbolisé par lglg *y*. Il y a bien un parallélisme absolu entre ce qui précède et la somme Ct *x* + Ct *y*, utilisée pour le produit *xy*. Et tout cela parce que, répétons-le, le calcul à la règle est un calcul par logarithmes, déguisé.

Nous pouvons maintenant formuler la loi suivante :

Loi générale de la puissance d'un nombre quelconque.

1° Le Ct de tout nombre (donné ou calculé) est-pris égal à l'indice de l'échelle, sur laquelle il est lu.

2° Le Ct de la puissance *x* du nombre donné *a*, est égal à la somme Ct *x* + Ct *a*.

3° Ajouter à cette somme Mp + 1, si 10C est nécessaire pour le calcul de *y*.

Cette loi est bien générale comme les exemples suivants vont le montrer :

► - Soit $y = 1,8^{0,35}$ Ct *a* = 2 Ct *x* = - 1 Mp + 1, total 2, *y* est donc lu sur LL2 comme *a* et *y* = 1,228 5.

► - Soit $y = 4,65^{0,028}$ Ct *a* = 3 Ct *x* = - 2 Mp 0, total 1, y est lu sur LL1, d'où *y* = 1,044.

► - Soit $y = 1,04^{33}$ Ct *a* = 1 Ct *x* = + 1 Mp + 1, total 3. C'est donc sur LL3 qu'on lit y = 3,65.

Pour terminer ce paragraphe, il nous reste à dire ce qui arrive lorsque l'exposant est négatif. Nous avons vu que pour $y = e^{-x}$, y se lisait sur les échelles inverses ; dans le cas général de $y = a^{-x}$, cette particularité se conserve, mais en se généralisant : c'est-à-dire que y se lira sur le groupe d'échelles LL opposé à celui où se pose a.

Ainsi, pour $7^{0,3}$, y se lit sur les inverses et, pour $0,7^{-0,3}$,y se lit sur les échelles directes. Quant au Ct, il se calcule d'après la loi énoncée en faisant simplement abstraction du signe moins pour déterminer le Ct de x.

Exemples : avec Ct = Ct a + Ct x + Mp

$84^{-0,037}$	= 0,848 6	Ct = 3 - 2 + 1 = 2	(LL02)
$1,224^{-17,5}$	= 0,029	Ct = 2 + 1 + 0 = 3	(LL03)
$0,23^{-0\ 42}$	= 1,85	Ct = 3 - 1 + 0 = 2	(LL2)
$0,53^{-0\ 03}$	= 1,019 2	Ct = 2 - 2 + 1 = 1	(LL1)
$0,862^{-34}$	= 155	Ct = 2 + 1 + 0 = 3	(LL3).

Enfin indiquons que, comme le produit, la puissance peut se calculer avantageusement en utilisant CI qui encore ici, élimine tout cas de hors règle et sous réserve de noter Mp + 1, si y est lu sous 10CI. On peut résumer symboliquement la loi générale complète comme suit:

Calcul de $y = a$

►1° $x > 0$ lire y sur LL de a,
$x < 0$ lire y sur LL inverses de a.

►2° Ct y = Ct a + Ct x + Mp

avec Ct a (et y) = indice de LL
Mp + 1 pour emploi de 10C ou 10CI.

Exercice n° 26

a) $4,5^{2,4}$ b) $8,7^{3,6}$ c) $17^{0,5}$ d) $6,3^{0\ 37}$ f) $1,8^{0,042}$
g) $5,4^{-2,2}$ h) $250^{-0,33}$ i) $24^{-0,065}$ j) $0,324^{-0\ 7}$ k) $0,625^{-0,0305}$

7. Racines d'un nombre quelconque.

Le calcul de $y = \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}$ se fait comme celui relatif au nombre e, à l'aide de CI, ou mieux avec C qui supprime les hors règle. Quant au Ct *y*, il se détermine en appliquant la loi précédente, aux signes près du Ct *x* et du Mp qui deviennent : moins. On a donc Ct *y* = Ct *a* - Ct *x* + Mp; celui-ci égal à - 1 pour 10C (ou 10CI). Bien qu'une racine négative soit rarement rencontrée, on peut en admettre le calcul, en lisant y sur les échelles inverses de celle de *a*, avec même Ct que ci-devant :

Exemples :

$\sqrt[7]{35} = 1{,}662$	Ct = 3 + 0 - 1	(LL2)
$\sqrt[0{,}16]{1{,}23} = 3.65$	Ct = 2 + 1 + 0 = 3	(LL3)
$\sqrt[4{,}5]{0{,}76} = 0{,}9408$	Ct = 2 - 0 - 1 = 1	(LLI)
$\sqrt[0{,}32]{0{,}98} = 0{,}9388$	Ct = 1 + 1 - 1 = 1	(LLI)
$\sqrt[17]{180} = 1{,}358$	Ct = 3 - 1 + 0 = 2	(LL2).

8. Loi générale des puissances et racines.

Nous pouvons maintenant grouper en un seul résumé symbolique les deux lois des puissances et des racines.

1°) x > 0 *y* lu sur mêmes LL que *a*,
x < 0 *y* lu sur LL inverses de *a*.

2°**)** Ct *y* = Ct *a* ± Ct*x* + Mp avec Ct *a* (et *y*) = indice de LL
Mp ± 1 pour index 10 (C ou CI).

On voit que cette loi est très semblable à celle des produits et quotients, la seule différence étant que la grandeur exacte du résultat est obtenue par le truchement de l'échelle de lecture.

9. Logarithmes quelconques d'un nombre.

A l'expression *y* = a^x correspond la réciproque *x* = ${}^{a}\lg\, y$, c'est-à-dire que *x* est le logarithme de *y* dans un système de base *a*. Pour l'obtenir directement il suffit de placer 1C sur la base *a*, et lg *y* est lu sur C en face de *y* lu sur LL (analogie avec ln).

Si donc, on place 1C (ou 10C) sur 10 de LL3, on obtient par lecture sur C le logarithme décimal complet (caractéristique comprise) d'un nombre compris entre 1,01 et 10 000.

Pour $y > 10$, lg $y > 1$ et pour $y < 10$ lg $y < 1$; mais en outre pour $y < 1{,}259$, lg $y < 0{,}1$ et pour $y < 1{,}023\,3$, lg $y < 0{,}01$.

Exemples : lg 38 = 1,58; lg 1,95 = 0,29; lg 1,049 = 0,020 8.

Pour les nombres inférieurs à 1, on peut les lire sur les échelles LL négatives, le logarithme est lu comme ci-dessus, mais sera précédé du signe moins. Ainsi lg 0,654 = - 0,184 que l'on écrit plus couramment $\bar{1}{,}816$.On peut vérifier cette mantisse avec l'échelle L.

Il est un logarithme quelquefois utilisé, c'est celui de base 2, appelé : logarithme binaire (lb). Il se calcule donc en plaçant 10C (ou 1C) sur 2 de LL2. On obtient facilement: lb 76 = 6,25 et lb 1,28 = 0,356, etc...

***Remarque*.** - La disposition 1C sur 10 de LL3 fournit également le moyen d'obtenir la valeur en décibels d'un rapport de puissance, et ceci en vraie grandeur en considérant C graduée de 10 à 100 dB. Pour les rapports inférieurs à 10, C est lue de 1 à 10 dB puis pour $r < 1{,}259$, C est lue de 0,1 à 1 dB, etc...

Pour les rapports de tensions, on peut doubler les valeurs précédentes, mais on peut faire mieux en obtenant ce produit en lecture directe. Il suffit d'amener 2 de C sur 10 de LL3 et de lire encore C de 10 à 100 dB, etc... Ainsi pour $r = 5{,}25$,

$n = 14{,}4$ dB; $r = 38$, $n = 31{,}6$ dB; $r = 1{,}43$, $n = 3{,}11$ dB;

$r = 1{,}074$, $n = 0{,}62$ dB, etc..,.

On admettra que les échelles LL apportent une grande simplification au calcul des décibels, mais pour leur produit par un nombre quelconque, il faut conserver l'échelle L, comme expliqué au chapitre 9 de la première partie.

10. Extenslon des échelles LL.

1er cas. - $y > 10^5$ ou $y < 10^{-5}$.

Si dans le calcul d'une puissance on trouve Ct = 4, on ne peut plus lire *y* par manque d'échelle pour les valeurs supérieures à 10^5 (LL3) ou inférieures à 10^{-5} (LL03). On peut cependant effectuer ce calcul en utilisant une décomposition soit du nombre donné, soit de son exposant. En effet, en posant : $a = b \times c$, on aura $y = a^x = b^x . c^x$; en posant $x = x1 + x2$,

$y = a^{x1} . a^{x2}$. Ces deux procédés peuvent également servir à augmenter la précision pour *y* supérieur à 1000, zone de lecture défavorisée par la contraction de l'échelle.

Exemple : $y = 24^{4,5}$, posons 24 = 4 x 6, nous trouvons *y* = 515 x 3 160 = 1 630 000. Ou encore 4,5 = 2 + 2,5, ce qui donne *y* = 575 x 2 830 = 1 630 000.

Dans certains cas, on pourra être obligé d'utiliser trois facteurs de décomposition analogues aux précédents.

2e cas. - $0,99 < y < 1,01$.

Si maintenant le calcul conduit à Ct = 0, nous n'avons encore plus d'échelle pour lire *y*. Cependant dans ce cas, nous pouvons dire que l'échelle D peut être considérée comme une échelle LL0 ou LL00, voyons pourquoi. Quelque soit le calcul proposé, on peut toujours l'effectuer partiellement jusqu'à LL1. Ainsi, $34,2^{0,002} = 1,424^{0,02} = 1,036^{0,2}$; le calcul se ramène donc à celui de cette dernière expression pour laquelle on peut écrire $a = 1 + n$, *n* étant d'ailleurs petit. Ceci nous permet d'obtenir, grâce aux développements en série :

$$y = a^x = (1+n)^x = x \ln \ (1+n) \text{ et aussi } \ln(1+n) = n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} ..$$

dont le troisième terme en n^3 est négligeable.

On a donc en première approximation $y = 1 + xn$, en admettant que In $(1 + n) = n$, c'est-à-dire que le produit *xn* peut être lu sur D en face du facteur *x*. Ainsi pour $1,036^{0,2}$

on trouve xn = 7,07, d'où y = 1,00707. D peut être considérée, en fait, comme LL0 sous réserve de prendre n comme des millièmes de y et d'ajouter 1. D est ainsi supposée graduée de 1,001 à 1,010 comme devrait l'être LL0.

Si nécessaire on peut augmenter la précision du calcul en corrigeant l'écart entre la lecture et la valeur de In, qui est de $\frac{n^2}{2}$. Il faut donc majorer de $\frac{n^2}{2}$ la valeur n lue sur D.

L'échelle A nous donne de suite n^2 = 0,000 050, d'où $n^2/2$ = 0,000 025 et finalement y = 1,007 095.

Dans le cas réciproque où a est compris entre 1,001 et1,01, on placera $n - n^2/2$ sur D pour obtenir y soit sur D (avec correction ci-dessus), soit sur une des échelles LL en lecture directe. Précisons que les corrections avec $n^2/2$ sont surtout sensible pour $n > 3$ et deviennent inutiles pour $n < 1$, car si $y < 1{,}001$, on a réellement $y = 1 + x\,n$, sans erreur appréciable (2^e^ échelle d'extension pour Ct = - 1).

Exemple : Soit à calculer $1{,}006\,5^{1{,}43}$ et .$1{,}006\,5^{27}$.

Dans les deux cas, on placera $n - n^2/2 = 6{,}5 - 0{,}021 = 6{,}479$ soit pratiquement 6,48 sur D.

La première puissance se lit encore sur D avec n = 9,270 et

$n^2/2 = 0{,}043$ d'où y = 1,009 313.

La deuxième a pour Ct : 0 + 1 + 1 = 2, et y sera lu sur LL2, soit y = 1,1914.

Pour les valeurs complémentaires $0{,}99 < a < 0{,}999$, les corrections précédentes ont même valeur mais changent de signe soit $+ n^2/2$ à la pose de n et $- n^2/2$ à la lecture pour $a = 1 - n$.

Exemple : $y = 0{,}995^{1{,}5}$, $a = 1 - 0{,}005$,

$n + n^2/2 = 5 + 0{,}012 = 5{,}012$.

La valeur lue pour x = 1,5 est 7,51 sur D, d'où :

$n - n^2/2 = 7{,}510 - 0{,}028 = 7{,}482$ et y = 0,992 518.

Loi résumée pour LL0, D (Ct $a = 0$).

Pour $a = 1 \pm n$, placer $n \pm n^2/2$ sur D, lecture de y sur D, valeur exacte: $n \pm n^2/2$.

11. Quelques applications usuelles des LL.

1° Graduation d'une échelle logarithmique.

Les échelles LL procurent le moyen d'obtenir très rapidement les divisions d'une échelle logarithmique de n'importe quelle longueur. Soit X cette longueur de base pour les nombres de 1 à 10. Il s'agit de calculer pour tout nombre n la longueur x partant du 1 de l'échelle, jusqu'à la division correspondant à n, c'est-à-dire $x = X \lg n$, nous savons que $\lg n = \frac{\ln n}{\ln 10}$ d'où $\frac{x}{\ln n} = \frac{X}{\ln 10}$. Cette expression est une quatrième proportionnelle particulière, mais qui se ramène en fait à celle que nous avons étudiée en première partie, si on remarque que ln n se trouve sur D pour n sur LL. La manipulation est donc la suivante. Placer X de C au-dessus de 10 de LL3 et lire x sur C, en vis-à-vis de n lu sur LL3 (ou LL2 où LL1).

Pour les lectures hors règle de cette disposition, on peut les retrouver par un décalage de toute l'échelle C, ou ce qui est souvent plus commode, en reprenant X sur l'échelle CF, sur laquelle x sera également lu.

Exemple : $X = 200$ mm.

$n =$	1,5	2	2,5	3,5	5	7,5	9
$x =$	35,2	60,3	79,6	108,8	139,8	175	191

Il arrive souvent que l'on ait besoin d'une seule portion d'échelle, sur toute la longueur dont on dispose. Par exemple, on désire graduer de $n1$ à $n2$ une longueur N mm. Pour faire le calcul précédent il faut d'abord connaître X.

On a pour $n2$, $x2 = X \lg n2$ et pour $n1$, $x1 = X \lg n1$, d'où $x2 - x1 = X \lg \frac{n2}{n1} = N$, d'où finalement $X = \frac{N}{\lg \frac{n2}{n1}}$

Exemple : N = 200 mm et $n1 = 4$, $n2 = 6$.

$X = \frac{200}{\lg 1{,}5} = \frac{200}{0{,}176} = 1136$, on calcule alors x pour les valeurs comprises entre n = 4 et n = 6, ce qui fournit par différence les longueurs suivantes :

$n = 4$	4,5	5	5,5	6
$xn - x4 = 0$	5,8	110	157	200 mm

2° Intérêts composés et annuités.

On peut considérer, à juste titre, l'échelle LL1 comme étant particulièrement spécialisée pour tous les calculs d'intérêts composés. Rappelons la formule de base donnant le capital A obtenu au bout de n années par un placement de a francs au taux de r : $A = a(1 + r)^n$; comme les taux usuels sont compris entre 1 et 11 %, on voit que $1 + r$ va de 1,01 à 1,11, valeurs limites de LL1. C'est donc à partir de cette échelle que la valeur $(1 + r)^n$ sera obtenue très facilement.

Rappelons également les deux formules principales ci-après calculables par la même échelle:

I. - Capital obtenu par placement de a francs au début de chacune de n années :

$$A = a\frac{1+r}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$$

II - Annuité à verser à la fin de chacune de n années pour amortir une dette A :

$$a = A\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

3° Echelles inverses.

Il ne faut pas oublier que par construction les échelles négatives du haut de la règle sont des inverses de celles du bas et réciproquement. On peut donc s'en servir pour le calcul des inverses, en utilisant particulièrement la portion de 1,01 à 10, à l'intérieur de laquelle on a une précision bien supérieure à celle de CI pour les nombres inférieurs à 2 (LL2) et réciproquement supérieurs à 0,5 (LL02).

4° Produits et quotients effectués avec LL.

On peut effectuer un produit, ou un quotient, en utilisant les échelles LL. Soit en effet $P = x\ y$ avec, par hypothèse $x > 1$. Dans le premier cas où $y > 1$, on peut poser $y = x^a$, d'où :

$P = x.\ x^a = x^{1+a}$. On aura de même $Q = \dfrac{x}{y} = x \cdot x^{-a} = x^{1-a}$.

Dans le deuxième cas, où $y < 1$, on peut poser $y = x^{-a}$ d'où :

$P = x.\ y = x^{1-a}$ et $Q = x^{1+a}$. Ce principe peut évidemment s'étendre à un nombre quelconque de facteurs. Cette façon d'effectuer produits et quotients permet d'augmenter la précision du calcul dans les cas où l'emploi de C et D devient impensable, savoir pour des valeurs comprises entre 1 et 1,5 ou 0,6.5 et 0,99, et comprenant quatre décimales.

On rencontre de tels calculs dans la pratique courante lorsqu'il s'agit de déterminer certains prix de vente, ceux-ci découlant d'un prix de base connu, par application d'une cascade de majorations (en pourcentage) et de commissions à réserver sur vente.

1^er^ exemple : Calculer P_1 en fonction de P_o (base) par application d'une majoration de 2,83 %, (taxe locale), puis de 3,64 % (hausse légale) et d'une commission sur vente de 4,75% à prévoir. Ceci se traduit par $P_1 = P_0 \times \dfrac{1{,}0283 \times 1{,}0364}{0{,}9525}$

On posera $x = 1{,}028\,3$ et en plaçant sur cette valeur de LL1 le 1CF, on obtient par simple lecture : $1{,}036\,4 = x^{1{,}28}$

0,9525 = $x^{-1,74}$, d'où $P_1 = P_0 . x^{4,02}$ ou P_1 = 1,119 P_0 .Le résultat peut être lu sans bouger la réglette, il est obtenu avec trois décimales exactes, ce qui serait impossible avec C et D.

2^e^ exemple : Soit $P_1 = P_0 \times \dfrac{1,0355 \times 1,0725}{0,945 \times 0,975}$

Posons x = -1,036 5 avec emploi de 1CF. Les exposants sont 1,953, 1,58 et 0,707, d'où $P_1 = P_0 . x^{5,24}$ = 1,206 5 P_0.

Remarquons que le choix de x est arbitraire, on peut aussi poser x = 1,072 5 avec cette fois 10C ; les exposants sont 0,513, 0,806 et 0,361, d'où $P_1 = P_0 . x^{1,11}$ = 1,206 5 P_0.

On a cependant intérêt à choisir pour x le plus faible des facteurs supérieurs à 1, parce que les exposants calculés tombent dans la zone de meilleure précision de l'échelle C ou CF, pour la plupart des facteurs.

3^e^ exemple : $Q = \dfrac{1,3640}{1,0865}$ avec x = 1,086 5

$$Q = x^{2.74} = 1,255\ 4$$

5^0 Lignes hyperboliques.

Pour le lecteur qui ne possède pas une règle spécialisée, rappelons qu'il pourra éventuellement calculer une ligne hyperbolique par les formules de définition suivantes :

$$sh\quad x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad ch\quad x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad th\quad x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$sh\quad x + ch\quad x = e^x \qquad ch\quad x = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2 x}}$$

Si la règle est munie d'une échelle *P* (cosinus), le passage de ch x à th x et vice-versa est obtenu par lecture directe (voir au chapitre 11).

- Petits arguments : $x < 0{,}1$.

Dans ce cas, on peut prendre pour valeurs les suivantes

$$sh\ x = x + \frac{x^3}{6} \qquad ch\ x = 1 + \frac{x^2}{2} \qquad th\ x = x - \frac{x^3}{3}$$

- Grands arguments : $x > 3$.

$$sh\ x = \frac{e^x}{2} = ch\ x \qquad th\ x = 1 - 2e^{-2x}$$

- Fonctions inverses.

Le calcul de l'argument dont on connaît la ligne se fera à l'aide des expressions :

$$\arg sh\ y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$$\arg ch\ y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

$$\arg th\ y = 0{,}5 \ln \frac{1+y}{1-y}$$

CHAPITRE 4

EMPLOI DES ÉCHELLES HYPERBOLIQUES

La règle à double-face dénommée généralement «Hyperbolic » ou « Hyperbolog » comporte sur le recto trois échelles spécialisées pour le calcul direct des lignes hyperboliques. Nous allons indiquer les modalités de leur lecture et les principaux calculs qu'elles permettent d'effectuer.

1. Echelles des sinus hyperboliques.

►La première échelle, symbole **Sh1**, est graduée en valeurs d'arguments, de 0,15 à 0,881, à lecture directe. En plaçant le Tc sur une de ses valeurs x, on obtient sur D, la valeur de sh x avec un Mp de lecture de 1 (Analogie avec S). Ainsi sh 0,265 = 0,268 et sh 0,67 = 0,722.

►La deuxième, symbole **Sh2**, est graduée de 0,881 à 3 et pour ces arguments, sh x est lu en vraie grandeur sur D, Mp = 0. Ainsi sh 1,28 = 1,66 et sh 2,77 = 7,95.

Pour les arguments $x < 0,1$ et $x > 3$, on fera le calcul avec **LL**, à partir des formules données en fin du chapitre précédent.

Comme sh x se lit sur D, on peut aussi obtenir avec le Tc son carré sur A, son inverse sur CI, son cube sur K, avec des Mp faciles à déterminer. En outre, tout produit tel que a. sh x peut s'effectuer avec CD, en plaçant d'abord x sur Sh1 ou Sh2 et sans avoir à lire la valeur de sh x. Quant au facteur a, il peut être un nombre placé sur C, une racine découlant d'un nombre placé sur B et aussi une ligne trigonométrique, dont l'angle serait placé sur S, ST ou T. Cette dernière possibilité nous servira d'ailleurs un peu plus loin.

2. Echelle des tangentes hyperboliques.

Une seule échelle, symbole Th, graduée en arguments de 0,1 à 3, fournit directement en lecture sur D la valeur de th x avec Mp - 1. Ainsi th 0,224 = 0,22 et th 1,06 = 0,785.

Pour les valeurs x < 0,1 et x > 3, voir en fin du chapitre précédent. Comme sur l'échelle Th, la lecture de x devient imprécise après 2, on pourra avantageusement employer la formule donnée pour les grands arguments, à partir de cette valeur.

Les remarques faites ci-dessus pour sh x sont entièrement valables pour th x.

3. Calcul du cosinus hyperbolique.

Puisqu'il n'existe pas d'échelle particulière à cette ligne, il faut en faire le calcul. Celui-ci peut s'effectuer de plusieurs manières, que voici :

1^{er} **procédé** : Echelle P.

Si l'on dispose d'une échelle P (cosinus) on peut obtenir directement ch x à partir de th x, lue auparavant sur l'échelle Th (voir au chapitre 11).

2^{e} **procédé** : Hypoténuse.

En considérant l'expression ch x = $\sqrt{1+sh^2\,x}$, on peut assimiler ch x à l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés : 1 et sh x, d'où son calcul rapide par une méthode inspirée de celle exposée au chapitre 8. En effet, soit à calculer ch 0,42, en plaçant x = 0,42 sur Sh1, on lit sur A directement sh^2 x = 0,187, ensuite en plaçant 1,187 sur A1, on obtient sur D : ch x = 1,09.

Autre exemple : x = 2,47, $sh^2 x$ = 34,5 et ch x = 5,95.

3e procédé : Calcul direct.

On peut aussi faire un calcul direct'en utilisant la formule $ch\quad x = \frac{sh\,x}{th\,x}$, ce quotient sera obtenu facilement en plaçant *x* à la fois sur Th et Sh1 ou Sh2, avec par conséquent, deux cas de lecture.

Dans le premier cas, relatif aux arguments de Sh1, on place 1C en vis-à-vis de *x* de l'échelle Th, puis le Tc sur *x* de Sh1 et la lecture de ch se fait sur C, sous le Tc (Mp 0).

Exemples : ch 0,525 = 1,14 et ch 0,85 = 1,383.

Dans le deuxième cas (Sh2), c'est 10C que l'on place en vis-à-vis de *x* de th, le reste étant identique.

Exemples : ch 1,24 = 1,873 et ch 2 = 3,764.

4e procédé : sh *x*.

On peut enfin utiliser la formule ch *x* = sh *x* + e^{-x}, qui par deux lectures directes et une addition donne le cosinus hyperbolique.

Exemple : ch 2,43 = 5,64 + 0,088 = 5,728.

Remarquons que tous ces procédés sont à retenir, car, suivant la valeur de l'argument, l'un peut être plus précis que l'autre, mais le quatrième est probablement le plus intéressant à utiliser par sa précision, et même sa simplicité (Emploi du seul Tc).

4. Fonctions circulaires et hyperboliques avec arguments complexes (imaginaires)

Les calculs relatifs à ces fonctions et leurs conversions en formule vectorielle, souvent utilisée, sont vraiment facilités par la règle «Hyperbolog » car il peuvent s'effectuer, sans avoir à connaître la valeur des lignes en cause, grâce à un calcul direct, partant des arguments et des angles donnés.

Ces calculs étant, toutefois compliqués de par leur nature même, il est nécessaire, d'indiquer la meilleure manière de les effectuer et de préciser pour chaque cas, les modalités de lecture et les coefficients qui entrent en jeu.

Nous ne rappellerons ici, que deux des formules de conversion, classiques, pour des fonctions avec arguments complexes savoir :

- ► sh (x + jy) = sh x . cos y + j ch x . sin y
- ► sin (x + jy) = sin x . ch y + j cos x . sh y

Remarquons que dans ces formules, on peut avoir des arguments en radian et en valeurs angulaires. Le calcul des premiers membres, peut donc s'effectuer avec une suite de produits et addition, qui conduit à, par exemple : sh (x + jy) = a + jb. Pour passer alors à l'expression vectorielle r/$\underline{\varphi}$ on calcule $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (procédé du chapitre 8) puis : $tg\varphi = \frac{a}{b}$ d'où avec l'échelle T ou ST. Cependant un tel calcul ne peut être direct à cause de la présence au second membre de ch x, ligne sans échelle propre. C'est pourquoi on lui préférera une autre forme de calcul, dérivant d'une décomposition vectorielle de l'expression proposée, qui elle, est à la fois directe et rapide, sitôt qu'on en a précisé les particularités. C'est ce que nous allons faire en exposant en détail, le premier type de calcul, et en donnant pour tous les autres, le résumé de l'étude pour application pratique.

5. Calcul de sh (x + jy)

En posant sh (x + jy) = a + jb, on peut considérer les grandeurs a = sh x. cos y et b = ch x. sin y, comme les côtés d'un triangle ayant pour hypoténuse r et comme angle adjacent y. Ceci nous donne le moyen d'obtenir deux formules de calcul direct pour r et φ, et qui sont : $tg\ \ \varphi = \frac{tg\ \ y}{th\ \ x}$ et $r = \frac{sh\ \ x \cdot \cos y}{\cos\varphi}$

On voit que ch *x* a disparu des expressions et la deuxième est calculée facilement en la,transformant, comme déjà vu en :

$r = \dfrac{sh \quad x \cdot \sin\left(90^{\circ} - y\right)}{\sin\left(90^{\circ} - \varphi\right)}$, dont tous les facteurs peuvent être placés sur des échelles Sh, S ou ST.

Quant au quotient qui donne tg φ, il est susceptible de différents cas de lecture, suivant la valeur de *y* et celle de *x*, il est donc intéressant de les étudier a priori, afin de rendre le calcul plus automatique et de supprimer toute cause d'erreur, dans la lecture de φ.

Nous ne détaillerons l'explication que pour deux des cas possibles en choisissant les plus typiques. En outre, nous considérerons que dans ces calculs, l'usage moderne des degrés à divisions décimales, est pratiquement recommandable et les exemples seront donnés en supposant de semblables échelles. Bien entendu, les lois que l'on trouvera ci-après restent les mêmes pour les divisions sexagésimales des angles.

1^er^ cas : 5,7° < y < 45° et tg φ < 1.

Puisque l'échelle th est sur la règle, donc fixe, on ne pourra poser que le quotient inverse $\dfrac{th \quad x}{tg \quad y}$, mais malgré cela φ pourra se lire directement avec ce seul coup de réglette.

Soit $tg\varphi = \dfrac{tg \quad 16{,}5^{\circ}}{th \quad 0{,}45}$, fixons en premier lieu le Ct propre du quotient en s'appuyant sur les Mp de lecture des lignes pour tg 16,5° Mp = - 1 (T) et pour th, Mp = - 1 d'où Ct = - 1 - (- 1) = 0. Plaçons alors 16,5° de T en vis-à-vis de 0,45 Th. Le quotient inverse 1/tg φ est à lire sur D en face de 1C, soit avec Ct = 0, d'où 1/tg φ = 1,42. Mais nous savons que tg φ se lit sur C en face de 10D comme un inverse habituel, soit 0,702 5 (Ct=- 1). Ceci nous permet de lire φ sur l'échelle T et φ = 35,1° (grâce au Tc).

Dans la pratique, on négligera de lire 1/tg φ et tg φ qui sont sans intérêt. Ce qui importe c'est de connaitre le Ct de lecture, car il indique sur quelle échelle se lit φ, et l'endroit de cette lecture, précisé par un index ou le Tc.

2e cas : 5,7 <y <45° et tg φ > 1.

Opérons comme ci-dessus avec $tg\varphi = \dfrac{tg \;\; 32{,}4^{\circ}}{th \;\; 0{,}27}$. Cette fois

1/ tg φ se lit sur D avec 10C et Ct = - 1, d'où 0,415 et par suite tg φ = 2,41 (Ct = 0). Nous ne pouvons plus lire φ directement, et c'est ici le seul cas où cette impossibilité se présente. En écrivant tg φ = ctg (90° - φ), nous constatons que tg (90° - φ) = 1/tg φ = 0,415, il suffit alors de reporter le Tc sur cette valeur de C poury lire 90°- φ = 22,55°, d'où φ =67,45°). Nous traduirons ce résultat en disant que dans ce cas particulier on reporte la valeur *n* lue sous 10C, sur C, avec Tc, pour lire 90° - φ sur T.

On trouvera dans le tableau 1, page 212 (chapitre 4, troisième partie), pour les 8 cas possibles, les manipulations à faire, analogues aux précédentes, et l'endroit exact où se, fait la lecture soit de φ, soit de 90° - φ. La lecture de tg φ et son Ct sont aussi indiqués, accessoirement, à titre de contrôle, puisqu'on n'en a nul besoin dans le calcul.

Exemple : Soit *Z* = sh (0,214 + j 53, 4°). En posant le quotient $tg\varphi = \dfrac{tg \;\; 53{,}4^{\circ}}{th \;\; 0{,}214}$ qui correspond au cinquième cas du tableau 1. on a de suite φ = 81,1°. Ensuite $r = \dfrac{sh \;\; 0{,}214 \cdot \sin 36{,}6^{\circ}}{\sin 8{,}9^{\circ}}$ se calcule d'un seul coup de réglette avec Ct = -2 -1 + 2 = - 1 et Mp = 0, d'où *r* =0,830; d'où finalement *Z* = 0,830 / <u>81,1°</u>

6. Calcul de ch (*x* + j*y*)

Il s'effectue de façon semblable au précédent, avec les formules de résolution suivantes :

$$\text{tg } \varphi = \text{th } x \text{ . tg } y \quad \text{et} \quad r = \frac{sh \quad x \cdot \sin y}{\sin \varphi}$$

Le calcul de la deuxième formule se fait sans difficulté et celui de la première présente encore plusieurs cas, mais beaucoup plus simples que pour le quotient et qui sont résumés dans le tableau II, page 212 (chapitre 4), avec les mêmes écritures symboliques :

On notera que pour y < 45°, il est nécessaire de fermer la règle après avoir posé le produit et sans déplacer le Tc pour lire φ ; pour le quatrième cas, le Tc est amené sur *n* C avant la lecture. Malgré ces particularités, l'usage du tableau doit éviter toute erreur, mais sans lui, on peut toujours calculer séparément tg et th pour en faire ensuite le produit.

7. Calcul de th (*x* + j*y*)

On peut l'effectuer de deux façons au choix :

$$th \quad (x + jy) = \frac{th \quad x + j \quad th \quad y}{1 + j \quad th \quad x \cdot tg \quad y} \qquad ou \qquad \frac{sh \quad (x + jy)}{ch \quad (x + jy)}$$

L'emploi de la première formule conduit à deux expressions : *a* + j*b*, puis deux *r* / φ, et le quotient des deux dernières est facile à faire.

8. Fonctions circulaires - argument complexe.

Les formules obtenues comme précédemment sont pour les trois lignes :

sin (*x* + j*y*) $\quad tg\varphi = \dfrac{th \quad y}{tg \quad x} \quad r = \dfrac{sh \quad y \cdot \cos x}{\sin\varphi}$

cos (*x* + j*y*) $\quad$ tg φ = th *x* . tg *y* $\quad r = \dfrac{sh \quad x \cdot \sin x}{\sin\varphi}$ (φ < 0)

$$tg(x + jy) = \frac{tg \quad x + j \quad th \quad y}{1 - j \quad tg \quad x \cdot th \quad y} \quad \text{ou} \quad r = \frac{\sin(x + jy)}{\cos(x + jy)}$$

Dans toutes ces formules, il faut au préalable convertir *x* radians en degrés, avec l'aide de ST qui fournit une lecture directe.

Pour le calcul de tg φ, on retrouve pour le cosinus, un produit déjà étudié (avec tableau de lecture) et pour le sinus un quotient qui, cette fois, est calculable puisque th est au numérateur. Les cas de lecture sont symétriques du quotient inverse déjà étudié et sont résumés dans le tableau III, de la page 2l2 (chap.4).

9. Fonctions inverses hyperboliques.

Le calcul inverse d'une fonction hyperbolique telle que *x* + j*y* = Arg sh *r* /_φ peut se faire par un procédé un peu long, mais guère difficile. Nous exposerons comment on arrive aux expressions de calcul pour cette première ligne, toutes les autres seront seulement données, puisqu'elles sont obtenues de façon analogue.

On transforme d'abord r /_φ en *a* + j*b* avec *a* = *r*. cos φ et *b* = *r*. sin φ. Ensuite grâce aux identités a = sh *x* + cos *y* et *b* = ch *x*. sin *y*, on peut écrire :

$a^2 + (1 + b)^2 = H^2 =$ (ch *x* + sin *y*)

$a^2 + (1 - b)^2 = h^2 =$ (ch *x* – sin *y*)

d'où l'on déduit : $ch\quad x = \dfrac{H+h}{2}$ et $\sin y = \dfrac{H-h}{2}$.

On reconnaît que *H* et *h* peuvent être considérés comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont *a* et 1 + *b* ou 1 - *b*, d'où leur calcul par le procédé du chapitre 8 (première partie).

Par ailleurs comme ch *x* est une ligne peu commode, on la remplacera par $sh\quad x = \dfrac{a}{\cos y}$ calculable facilement après avoir trouvé *y* ; d'où finalement :

Processus : **1^er^ :** *a* = *r*. cos φ ; *b* = *r*. sin φ

2^e^ : *H* avec *a* et 1 + *b* ; *h* avec *a* et 1 - *b*

3^e^ : $\sin y = \dfrac{1}{2}(H-h)$; $sh\quad x = \dfrac{a}{\cos y}$

Exemple : Arg sh 0,435 /<u>32,4°</u>

a = 0,435 sin 57,6° = 0,367, *b* = 0,435 sin 32,4° = 0,233

avec *a* = 0,367 et 1 + *b* = 1,367, on trouve *H* = 1,415

avec *a* = 0,367 et 1 - *b* = 0,633, on trouve *h* = 0,732

d'où $\sin y = \dfrac{1{,}415 - 0{,}732}{2} = 0{,}3415$ et *y* = 19,97°

puis $sh\quad x = \dfrac{0{,}367}{\sin 70{,}03^{-}} = 0{,}932$ et *x* = 0,382.

On peut ainsi écrire 0,435 <u>/32,4°</u> = sh (0,382 + j 19,97°).

Pour *x* + j*y* = Arg ch *r* <u>/φ</u>, le processus est: :

► 1° *a* = *r*. cos φ, b = r. sin y

► 2° *H* avec 1 + *a* et *b* ; *h* avec 1 - *a* et *b*

► 3° cos *y* = sin (90° - y) = 1/2 (*H* - *h*) ; sh *x* = *b* /sin *y*.

Pour $x + jy$ = Arg th r $\underline{/\varphi}$ le calcul est plus simple avec les formules suivantes :

$$th \quad 2x = \frac{2\cos\varphi}{1/r + r} \qquad\qquad tg \quad 2y = \frac{2\sin\varphi}{1/r - r}$$

10. Fonctions inverses circulaires.

Les processus sont analogues aux précédents, soit :

I . Arg sin r $\underline{/\varphi}$:

1° $a = r.\cos\varphi$; $b = r.\sin\varphi$.
2° H avec 1 + a et b ; h avec 1 - a et b
3° $\sin x = \frac{H - h}{2} \qquad sh \quad y = \frac{b}{\cos x}$

II . Arg cos r $\underline{/\varphi}$ (φ< 0) :

1° a = r. cosφ ; b = r. sin φ .
2° H avec 1 + a et b ; h avec 1 - a et b
3° $\cos x = \frac{H - h}{2} \qquad sh \quad y = \frac{b}{\sin x}$

III . Arg tg r $\underline{/\varphi}$:

$$tg \quad 2x = \frac{2\cos\varphi}{1/r - r} \qquad\qquad th \quad 2y = \frac{2\sin\varphi}{1/r + r}$$

Il ne faut pas oublier dans les trois cas présents de convertir x obtenu en degrés, en une valeur radian pour exprimer correctement $x + jy$.

On trouvera au tableau 7 du chapitre 4 de la troisième partie, un résumé de toutes les formules de calcul étudiées dans les paragraphes précédents (page 211).

TROISIÈME PARTIE

RÉCAPITULATION

CHAPITRE 1

EXERCICES DE RÉVISION GÉNÉRALE

Les quelques exercices qui suivent donneront au lecteur l'occasion d'appliquer toutes les lois de calcul étudiées dans cette méthode. Les expressions proposées conduisent à une combinaison possible, entre différentes échelles, que le lecteur devra choisir judicieusement pour obtenir la manipulation la plus rapide, qui souvent se réduit à un seul coup de réglette.

N° 27 : $Q = \dfrac{136\sqrt{43,5}}{32,8}$

N° 28 : $Q = \dfrac{\sqrt{275}\sqrt{0,22}}{64}$

N° 29 : $Q = \dfrac{68 \times 19^2}{283}$

N° 30 : $Q = \dfrac{230 \times 5,9^2}{4850}$

N° 31 : $P = 17,6\sqrt{565}\sqrt{0,27}$

N° 32 : $P = 68{,}5\sqrt[4]{196}$.

N° 33 : $P = 26{,}5 \times 37^{3/2}$

N° 34 : $P = 0{,}42 \times 184^{2/3}$

N° 35 : $U = \sqrt{4350} \times (-\ 11\ \mathrm{dB})$

N° 36 : $U = \sqrt{370} \times (23\ \mathrm{dB})$

N° 37 : $\sin \alpha = \dfrac{230}{415}$ $\alpha = ?$

N° 38 : $\cot \alpha = \dfrac{1725}{2860}$ $\alpha = ?$

N° 39 : $P = \sqrt{345}\ \sin 38°\ 50'$

N° 40 : $P = \sqrt[3]{36{,}5}\ \ tg\ \ 12^{-}25'$

N° 41 : $x = \lg \operatorname{tg} 76°25'$

N° 42 : colg $\sin \alpha = 0{,}402$ $\alpha = ?$

N° 43 : $P = 21{,}4\ \dfrac{\sin 17^{-}25'}{\sin 3^{-}36'}$

N° 44: $P = 23{,}75 \sin^2 18°\ 35'$

N° 45: $P = 34{,}7 \operatorname{cosec} 46°\ 45'$

N° 46: $P = 725 \times 35^{-0{,}45}$

CHAPITRE 2

PETIT FORMULAIRE POUR LES CALCULS A LA RÈGLE

Nous avons cru utile de grouper ci-après quelques expressions mathématiques, et quelques formules de la physique et de l'électricité, qui sont directement calculables à la règle.

1. Surface d'un triangle.

Côtés : a, b, c. Périmètre : $2p = a + b + c$.

Surface : $S = \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$.

2. Rayon du cercle circonscrit à un triangle.

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

3. Surface des polygones réguliers.

En fonction du côté c, du diamètre du cercle circonscrit d, et de l'épaisseur e. Celle-ci est mesurée- entre deux côtés parallèles, sauf pour le pentagone et le triangle; mesure faite entre côté et sommet opposé.

Polygone :	c^2 **x**	d^2 **x**	e^2 **x**
Triangle équilatéral…….	0,433	0,325	0,578
Carré…………………….	1,000	0,500	1,000
Pentagone ……………..	1,721	0,5945	0,725
Hexagone………………	2,598	0,650	0,866
Octogone……………….	4,828	0,707	0,830
Décagone………………	7,694	0,735	0,813
Dodécagone……………	11,196	0,750	0,804

4. Surface et volume d'une sphère.

Rayon *r*. Diamètre *d*., Surface $S = 4 \pi r^2 = \pi d^2$.

Volume: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3 = 0{,}5236\, d^3$.

5. Résolution des triangles quelconques.

Soit *a, b, c*, les côtés opposés aux angles *A, B, C*.

1er cas : Données : *a, B* et *C*.

$$b = \frac{a \sin B}{\sin(B+C)} \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin(B+C)}$$

$$A = 180^{\circ} - (B+C) \qquad S = \frac{a^2}{2} \times \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}$$

2e cas : Données : *b, c* et *A*.

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} \qquad tg\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\, tg\left(90^{\circ} - \frac{A}{2}\right)$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^{\circ} - \frac{A}{2} \qquad S = \frac{1}{2} b \;\; C \sin A$$

3e cas : Données: *a, b* et *A*.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

4e cas : Données : *a, b* et *c* ($2p = a + b + c$).

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\;(p-c)}{b \cdot c}} \quad \text{ou :} \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p\;\;(p-a)}{b \cdot c}}$$

Pour *B* et *C* : permutation circulaire. de : *a, b* et *c*.

$$S = \sqrt{p \quad (p-a) \quad (p-b) \quad (p-c)}$$

6. Valeur en millièmes de radian d'un angle en degrés, minutes ou secondes et leurs multiples.

α	degré	minute	seconde
1	17,453	0,29088	0,004848
2	34,907	0,58176	0,009696
3	52,360	0,87264	0,014544
4	69,813	1,16352	0,019392
5	87,266	1,45440	0,024240
6	104,720	1,74528	0,029088
7	122,173	2,03616	0,033936
8	139,626	2,32704	0,038784
9	157,080	2,61792	0,043632

7. Logarithmes népériens (ln) et décimaux (1g).

e = 2,718 281 828 4

M = lg e = 0,434 29 $\qquad \dfrac{1}{M}$ = ln 10 = 2,302 59

ln *x* = $\dfrac{1}{M}$ lg *x* $\qquad$ lg *x* = M ln *x*

8. Calculs avec angle auxiliaire.

1er cas : $z = \dfrac{y-x}{y+x}$

Poser : $\dfrac{y}{x}$ = tg *a* $\qquad$ On a: z = tg (45° - a).

2e cas : $z = \sqrt{y^2 - x^2}$

Poser : $\frac{x}{y}$ = sin *a* On a : *z* = *y* sin (90° - *a*).

9. Formules trigonométriques.

sin 2*a* = 2 sin *a* sin (90° - *a*)
cos 2*a* = 1 - 2 $\sin^2 a$ = 2 $\cos^2 a$ - 1
sin 3*a* = 3 sin *a* – 4 $\sin^3 a$
1 + cos 2*a* = 2 $\cos^2 a$ 1 - cos 2*a* = 2 $\sin^2 a$

$$\sin p \pm \sin q = 2 \sin \frac{p \pm q}{2} \sin\left(90^{\circ} - \frac{p \pm q}{2}\right).$$

$$tg\ a \pm tg\ b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \ \cos b}$$

$$\frac{1 - \sin 2a}{1 + \sin 2a} = tg^2(45^{\circ} - a) \qquad \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} = tg^2 a$$

10. Loi de la réfraction.

i : angle d'incidence. *r :* angle de réfraction. *n* : indice.
sin *i* = *n* sin *r.* Eau : *n* = 1,33. Verre : *n* = 1,50.

11. Loi de la chute des corps.

h : hauteur. *v* : vitesse au temps *t*. *g* : accélération
g = 9,808 96 m/s^2.

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 4{,}90448 \ t^2 \qquad v = g \cdot t = \sqrt{2g \cdot h}$$

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot h = 0{,}45155\sqrt{h} \qquad v = 4{,}429\sqrt{h}$$

12. Loi des éclairements.

E: éclairement en lux. *I* : intensité de la source en candelas.
a : angle d'incidence. *d* : distance en mètre du plan éclairé.

$$E = \frac{I \cos a}{d^2} = \frac{I \sin\left(90^{-} - a\right)}{d^2}$$

13. Résistance d'un conducteur électrique.

L : longueur en centimètres. *S* : section en cm^2.
ρ : résistivité en ohm - cm. *R* : résistance en ohm.

$R = \rho \frac{L}{S}$ Constantan : ρ = 50 x 10^{-6} Ω cm

Cuivre : ρ = 1,6 X 10^{-6} Ω cm

14. Capacité d'un condensateur électrique.

C : capacité en microfarads
S : surface des armatures en centimètres-carrés
e : épaisseur du diélectrique en . centimètres
k : pouvoir inducteur spécifique.

$$C = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^5} \frac{k \cdot S.}{e} = 8{,}85 \times 10^{-8} \frac{k \cdot S}{e}$$

15. Fréquence et longueur d'onde d'un circuit résonnant.

L : inductance en microhenrys
C : capacité en picofarads
F : fréquence en kilohertz
l : longueur d'onde en mètres.

$LCF^2 = 2{,}533 \times 10^{10}$ $l^2 = 3{,}553\ L\ C$

16. Puissance électrique.

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R} \qquad U = \sqrt{PR} \ ; \ I = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

17. Décharge d'un condensateur.

$$I = \frac{U}{R} e^{\frac{-t}{CR}} \qquad t = -CR \ln \frac{IR}{U}$$

CHAPITRE 3

SOLUTION DES EXERCICES

Les résultats sont donnés avec la lettre référence du calcul proposé, placé devant celui-ci dans chaque exercice.

Exercice N°1

a) 20,6
b) 0,014
c) 78,5

Ct	Mp
- 1	+ 1
+ 1	
0	+ 1
a)	+ 1

Ct	Mp
- 2	+ 1
- 1	
- 3	+ 1
b)	- 2

Ct	Mp
+ 3	0
- 2	
+ 1	0
c)	+ 1

d) 9,8
e) 2740000
f) 703

+ 2	0
- 2	
0	0
d)	0

+ 2	+ 1
+ 3	
+ 5	+ 1
e)	+ 6

+ 3	0
- 1	
+ 2	0
f)	+ 2

Exercice N°2

a) 8500
b) 9,15
c) 138000
d) 5920

- 2	
+ 3	+ 1
+ 1	
0	
+2	+ 1
a)	+ 3

+ 1	
- 3	+ 1
- 1	
+ 2	
- 1	+ 1
b)	0

0	
+ 2	
+ 3	+ 1
+ 1	+ 1
- 3	
+ 3	+ 2
c)	+ 5

+ 1	
- 1	+ 1
+ 2	+ 1
0	+ 1
- 2	
0	+ 3
d)	+ 3

Exercice N°3

a) 17,84
b) 5,84
c) 322,5

+ 2	0
- 1	
+ 1	0
a)	+ 1

+ 1	- 1
0	
+ 1	- 1
b)	0

+ 2	- 1
+ 1	
+ 3	- 1
c)	+ 2

d) 0,072
e) 0,0226
f) 21050

- 2	- 1
+ 1	
- 1	- 1
d)	- 2

+ 1	0
- 3	
- 2	0
e)	- 2

+ 8	- 1
- 3	
+ 5	- 1
f)	+ 4

g) 0,005475
h) 14,8
i) 0,05230

- 1	0
- 2	
- 3	0
g)	- 3

+ 1	0
+ 1	0
h)	+ 1

0	- 1
- 1	
- 1	- 1
i)	- 2

Exercice n° 4

a) 445
b) 0,06475
c) 234,5

+ 1	+ 1
- 1	- 1
+ 2	+ 1
+ 1	
- 2	
+ 1	+ 1
a)	+ 2

+ 1	
- 2	- 1
+ 2	
- 3	
+ 1	
- 1	- 1
b)	- 2

- 1	
+ 2	- 1
+ 5	
- 2	
- 2	
+ 2	- 1
c)	+ 2

Exercice n° 5

a) 15 620
2 x 2 = + 4

b) 0,137
(- 1 x 2) + 1 = - 1

c) 0,005 62
(- 2 x 2) + 1 = - 3

d) 813
1 x 2 = + 2

e) 8 930
(1 x 2) + 1 = + 3

f) 301 000
(2 x 2) + 1 = + 5

g) 2,43 x 10^{-8}
(- 4 x 2) = - 8

h) 74
Mp + 1

i) 10 800
+ 2 x 2 = + 4

j) 0,0466
(- 1 x 2) = - 2

k) 0,109
(- 1 x 2) + 1 = - 1

l) 23,4
Mp + 1

SOLUTION DES EXERCICES

Exercice N° 6

a) 1 910
(+ 1 x 2) - 1 + 2 = + 3

b) 0,496
- 2 + 1 = - 1

c) 9 200
(+ 1 x 2) + 1 = + 3

d) 28,25
(1 x 2) + 2 + 1 = + 1

e) 0,009 08
(-2 x 2) + 1 = - 3

f) 0,423
(- 2 x 2) + 2 + 1 = - 1

g) 500
+ 1 x 2 = + 2

h) 145
+ 1 + 2 = + 2

i) 1,18
(- 1 x 2) + 2 = 0

j) 467
(+ 2 x 2) - 1 – 1 = + 2

k) 13,7
(+1 x 2) – 1 = + 1

l) 0,81
+ 1 – 2 = - 1

m) 0,004 63
- 1 + (- 1 x 2) = - 3

n) 529
+ 3 - 1 = + 2

Exercice N° 7

a) S = 222
1 x 2 = + 2

b) S = 141800
(2 x 2) + 1 = + 5

c) S = 0,062 5
-1 x 2 = - 2

d) S = 0,00515
(- 2 x 2) + 1 = - 3

e) S = 9,08
Mp = 0

f) S = 0,009 5
(- 1 x 2) - 1 = - 3

Exercice N° 8

a) 14,75
(1 x 2) + (- 1 x 2) + 1 = + 1

b) 0,058 3
(1 x 2) + (- 2 x 2) = - 2

c) 23 600
(1 x 2) + 2 = + 4

d) 250
(- 1 x 2) + (1 x 2) + 2 = + 2

e) 0,019 8
(- 2 x 2) + 2 = - 2

f) 226 000
(1 x 2) + 3 = + 5

g) 1330
(1 x 2) + 1 = + 3

h) 295
(1 x 2) = + 2

i) 0,007 1
(- l x 2) -l = - 3

j) 0,000 519
(1 x 2) + (- 2x 2) = - 4

k) 197,6
Mp +2

l) 0,453
(- 1 x 4) + 3 = - 1

m) 564000
(- 1 x 4) + 1 = + 5

Exercice N° 9

a) 23,1 b) 791 c) 5,25 d) 43,3 e) 2,91
f) 0,48 g) 0,221 50 h) 0,303 i) 0,916

Exercice N° 10

a) 11,43
- 1 + 1 + 1 = + 1

b) 288
+ 2 - 1 + 1 = + 2

c) 474
+ 3 - 1 = + 2

d) 0,138
Ct. - 1

e) 0,493
+ 1 - 1 – 1= - 1

f) 2,81
-1 + 2 – 1 = 0

g) 195
+ 1 + 1 = + 2

Exercice N° 11

a)d = 21,83
+1

b)d = 10,5
Mp + 1

c)d = 0,782
- 1

d)d = 0,192
- 1

e)d = 47,6
+ 1

f)d=0,26
- 1

Exercice N° 12

a) 4,42
Ct – 1Mp + 1 = 0

b) 119
Ct + 1 Mp + 1 = + 2

c) 2,02
Ct - 1 + 1 = 0

Exercice N° 13

a) x^3 = 21900
(1 x 3) + 1 = + 4

b) x^3 = 474
Mp + 2

c) x^3 = 0,006 33
- 1 x 3 = - 3

d) x^3 = 0,000 593
(- 2 x 3) + 2 = - 4

Exercice N° 14

a) 63,5
Mp + 1

b) 5 270
(1 x 3) +(- 1 x 2) + 3 = + 3

c) 42,2
(- 1 x 3) + 4 = + 1

d) 0,082
(- 2 x 3) + (1 x 3) + 1 = - 2

e) 0,14
(- 1 x 6) + 5 = - 1

f) 3 460 000
1 x 6 = + 6

Exercice N° 15

a) 9,58

b) 16,9
Ct + 1

c) 0,319
- 1

d) 265
+ 2

e) 0,617
+ 1

f) 4,26

SOLUTION DES EXERCICES

Exercice N° 16

a) 18,65
+ 1 - 1 + 1 = + 1

b) 1,168
-1 + 1 = 0

c) 0,018 75
- 1 - 1 = - 2

d) 6,53
+ 1 - 1= 0

e) 0,055
- 1 - 1 = - 2

f) 163,3
+ 2

Exercice N° 17

a) 190
+ 1 + 1 = + 2

b) 0,033 70
- 1 - 1 = - 2

c) 61,8
+ 1 + 1 – 1 = + 1

d) 14,25
+ 1

Exercice N° 18

a) 0,000 043
(- l x 3) - 2 = - 5

b) 11
(1 x 3) – 2 = + 1

c) 2,36
(1 x 3) - 3 = 0

d) 6,307
Mp - 1

e) 1,166
Mp -1

f)0,038 60
+ 1 - 1 = 0

Exercice N° 19

a) 228
1 x 2 = + 2

b) 8 070
(1 + 2) + 1 = + 3

c) 0,092 30
(- 1 x 2) = - 2

d) 0,003 19
(- 2 x 2) + 1= - 3

e) 151
Mp + 2

f)1990
1 x 3 = + 3

g) 0,51
(- 1 x 3) + 2 = - 1

h) 0,007 12
(- 1 x 3) = - 3

Exercice N° 20

lg = a) 2,243 b) $\bar{2},580$ c) 3,428 d) $\bar{4},869$

colog = e) $\bar{3},274$ f) 0,036 g) $\bar{2},710$ h) $\bar{5},332$

Exercice N° 21

Puissances = a) 25,74 b) - 5,54 c) - 27,96 d) 17,35 dB
Tensions = e) 36,2 f)77,20 g) - 8,64 h) - 56,48 dB

Exercice N° 22

Puissances =	a) 18 220 + 2 + 1 + 1 = + 4	b) 151 - 1 + 2 + 1 = + 2	c) 651 + 1 + 1 = + 2
	d) 0,001 71 - 2 - 1 = - 3	e) 0,033 3 + 1 - 2 - 1 = 2	
Tensions	a) 1 700 + 1 + 1 + 1 = + 3	b) 49,3 Ct + 1	c) 87,6 - 1 + 2 = + 1
	d) 9,32 + 1 - 1 = 0	e) 0,011 8 - 1 - 1 = - 2	

Exercice N° 23

a) 0,111 8 b) 0,165 c) 0,228 d) 0,280 e) 0,467
f) 0,796 g) 0,016 58 h) 0,03054 i) 0,059 30

Petits angles. Degrés a) 0,006 69 b) 0,002 49 c) 0,000 2 33 d) 0,008 25
Petits angles. Grades e) 0,003 45 f) 0,000 855 g) 0,000 119 h) 0,00141

Exercice N° 24

a) 0,136	b) 0,220	c) 0,759	d) 0,0215	e) 0,036 6
f) 0,085 15	g) 1,616	h) 2,30	i) 5,975	j) 15,97
k) 22,9	l) 57,3	m) 132	n) 218,5	p) 616

Exercice N° 25

a) 6,7	b) 24,5	c) 270	d) 1,284	f) 1,0429
g) 0,259	h) 0,006 1	i) 0,482	j) 0,771	k) 0,9808

Exercice N° 26

a) 37	b) 2 400	c) 4,125	d) 1,975	f) 1,025
g) 0,024 5	h) 0,162	i) 0,813 5	j) 2,2	k) 1,014 4

Exercices de récapitulation

N° 27 Q = 27,33	N° 28 Q = 0,1215	N° 29 Q = 86,7
N° 30 Q = 1,65	N° 31 P = 217	N° 32 P = 256
N° 33 P = 5 940	N° 34 P = 13,6	N° 35 U = 18,6
N° 36 U = 272	N° 37 α = 33° 40'	N° 38 α = 58°53'
N° 39 P = 11,65	N° 40 P = 0,73	N° 41 x = 0,617
N° 42 α = 23° 20'	N° 43 P = 101,8	N° 44 P = 2,415
N° 45 P = 47,7	N° 46 P = 146,5	

CHAPITRE 4

TABLEAUX SYNOPTIQUES DES COEFFICIENTS

Les huit tableaux qui suivent permettent de retrouver facilement d'une part la manipulation, et d'autre part les coefficients (Ct et Mp) à appliquer au résultat lu ; ceci pour tous les calculs simples ou complexes étudiés en première et deuxième partie.

Se reporter au Chapitre 1 des Généralités pour la compréhension de l'écriture symbolique et des notations.

Résumé des principes de base

Ct : Coefficient d'opération = Caractéristique du logarithme.
Mp : Coefficient de manipulation = découle de celle-ci(Réglette) ou de la lecture sur échelle.

Produits ou quotients effectués avec : C, CI et D.

$n = \Sigma\ Ct + \Sigma\ Mp$ $\quad$ n = Ct du résultat.

Résultat lu (1 à 10) à multiplier par 10^n ; **OU** :
Décalage de la virgule de n rangs : à droite si $n > 0$
à gauche si $n < 0$

Loi des Mp : ± 1 pour index 10 (C ou CI).

TABLEAUX SYNOPTIQUES DES COEFFICIENTS

1. Opérations fondamentales

***Notation*: *X* Ct de *x*. *Y* Ct de *y* (Ct = Caractéristique).**

Calcul de:	Pose du I^{er} facteur	Pose du 2^{e} facteur	lu sur	Résultat Mp	Ct
$x \cdot y$	1C / *x* D 10C / *x* D	Tc / *y* C	D / Tc	0 + 1	*X* + *Y*
ou					
$x / \frac{1}{y}$	Tc / *x* D	*y* CI / Tc	D / 1CI D / 10CI	0 + 1	*X* + *Y*
$\frac{x}{y}$	Tc / *x* D	*y* C / Tc	D / 1C D / 10C	0 + 1	*X* - *Y*
ou					
$x \cdot \frac{1}{y}$	1CI / *x* D 10 CI / *x* D	Tc / *y* CI	D / Tc	0 + 1	*X* - *Y*
$\frac{1}{x}$	Tc / *x* D	………………	CI / Tc	- 1	- *X*
x^2	Tc / *x* D	………………	A1 / Tc A2 / Tc	0 + 1	2*X*
x^3	Tc / x D	………………	K1 / Tc K2 / Tc K3 / Tc	0 +1 +2	3*X*
$\sqrt[2]{x}$	Tc / *x* A1 Tc / *x* A2	1 < *x* <10 10< *x* <100	D / Tc	0	*X* / 2
$\sqrt[3]{x}$	Tc / *x* KI Tc / *x* K2 Tc / *x* K3	1 < *x* <10 10< *x* <100 100< *x* <1000	D / Tc	0	*X* / 3

2. Opérations combinées avec échelle des carrés

***Notation* : *X* Ct de *x*. *Y* Ct de *y* (Ct = Caractéristique).**

Calcul de	Pose du 1er facteur	Pose du 2e facteur	Résultat lu sur	Résultat Mp	Résultat Ct
$x \cdot y^2$	1C / *y* D .... 10C / *y* D	TcI / *x* B1	B1 / Tc B2 / Tc B1 / Tc	0 + 1 +2	*X* + 2*Y*
y^2 / x	Tc / y D	x B1 / Tc	A1 / 10B A1 / 1B A2 / 1B	- 1 0 + 1	2*Y* - *X*
x / y^2	Tc / *x* A1	*y* C / Tc	/ 100B A1 / 10B / 1B	-2 - 1 0	*X* - 2*Y*
$x^2 . y^2$ ou : x^4	1C / x D .... 10C / *x* D	Tc / *y* C (ou *x* C)	A1 / Tc A2 / A1 / Tc A2 /	0 + 1 +2 +3	2 (*X* + *Y*) ou: 4*X*
y^2 / x^2	Tc / y D	*x* C / Tc	A1 / 10C A2 / 10C A1 / 1C A2 / 1C	-2 - 1 0 +1	2 (*Y* - *X*)
$y \cdot \sqrt{x}$	1C / *y* D 10C / *y* D	Tc / *x* B	D / Tc	0 + 1	*Y* + *X* / 2
$\dfrac{y}{\sqrt{x}}$ $\dfrac{\sqrt{x}}{y}$	Tc / y D Tc / *z* A	*x* B / Tc *y* C / Tc	D / 1C ou D / 10C	0 + 1	*Y* – *X* / 2 *X* / 2 - *Y*
$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$	1B / *x* A 100B / *x* A	Tc / *y* B	D / Tc	0 + 1	(*X* + *Y*) / 2
$\dfrac{1}{x^2}$	TcI / *x* CI		A1 / Tc A2 /	-2 -1	- 2*X*
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	Tc / *x* A	(1 < *x* < 100)	CI / Tc	- 1	- *X* / 2

3. Opérations combinées avec échelle des cubes.

***Notation* : *X* Ct de *x*. Y Ct de *y* (Ct = Caractéristique).**

Calcul de:	Pose du 1er facteur	Pose du 2e facteur	Résultat lu sur :	Mp	Ct
$x \cdot y^2$	1CI / x K1 ……………… ……………… 10C / x K1	Tc / y C ……………… ………………	K1 / Tc K2 / K3 / K1 /	0 + 1 +2 + 3	$X + 3Y$
x / y^3	Tc / x KI	y C / Tc	K1 / 1C K3 / 10C K2 / 10C K1 / 10C	0 ~1 -2 -3	$X - 3Y$
$x^3 \cdot y^3$ ou: x^4	1C / x D ……………… ……………… 10C / x D ……………… ………………	Tc / y C (ou x C)	K1 / Tc K2 / K3 / K1 / Tc K2 / K3 /	0 + 1 +2 +3 +4 +5	$3 (X + Y)$
$y \cdot \sqrt[3]{x}$	1C / x K 10C / x K	Tc / y C	D / Tc	0 + 1	$Y + X / 3$
$\frac{\sqrt[3]{x}}{y}$	Tc / x K $(1 < x < 1000)$	y C / Tc	D / 1C D / 10C	0 -1	$X / 3 - Y$
$\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$	1CI / y K 10CI / y K	Tc / x K ………………	CI / Tc ………………	0 - 1	$(Y - X) / 3$
$1 / x^3$	Tc / x CI		K1 / K2 / Tc K3 /	- 3 - 2 - 1	$- 3 X$
$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	Tc / x K	$(1 < x < 1000)$	CI / Tc	-1	$- X / 3$

4. Triangle rectangle

1er Problème. **b > c** $x = \dfrac{b}{c}$ $a = c\sqrt{x^2 + 1}$

Données 1 < c < 10	Pose de : c C / et Tc /	Lecture de x^2 / Tc Mp :	Pose de : Tc / x^2 + 1 Mp	*a* C / Tc Ct :
1 < *b* < 10 1 < *x* < 10	1 D b C	A1 0 A2 + 1	A1 0 A2 + 1	0 0
10 < *b* < 10C 1 < *x* < 10	10 D b C (*b* : Ct + 1)	A1 0 A2 + 1	A1 0 A2 +1	+ 1 + 1
b > 10c *x* > 10	Formule de calcul : $a = b + \dfrac{c^2}{2b}$			

2e Problème. **Calcul avec échelle P (Cosinus).**

$b = a\sqrt{1-x^2}$ $x = \dfrac{c}{a}$	1° *a* C / 10 D puis Tc / *c* C – Lire $\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ P / Tc 2° Tc / $\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ D – Résultat : *b* C / Tc

2e Problème. $x = \dfrac{a}{c}$ $b = c\sqrt{x^2 - 1}$

Données 1 < *c* < 10	**Pose de : *c* C / et Tc /**	**Lecture de x^2 / Tc Mp :**	**Pose de : Tc / x^2 -1 Mp**	***b* C / Tc Ct :**
$1 < x < \sqrt{1{,}1}$ report : $\sqrt{1{,}1} < x < \sqrt{2}$ report : $\sqrt{2} < x < 10$ (*a* > 10)	1D aC 10D Mp + 1 1D aC 10D Mp + 1 1D aC	A1 0 ……………… A1 0 ……………… A1 0 A2 + 1	A1 - 2 A1 - 2 A2 - 2 A2 - 2 A1 0 A2 + 1	- 1 0 - 1 0 0 0
$1 < x < \sqrt{1{,}1}$ $\sqrt{1{,}1} < x < \sqrt{2}$ $\sqrt{2} < x < 10$ (*a* : Ct + 1)	10D aC - d_0 - - d_0 - - d_0 -	A1 0 - d_0 - - d_0 - A2 + 1	A1 - 2 A2 - 2 A1 0 A2 + 1	0 0 + 1 + 1
a < 10 *c* *x* < 10	Formule de calcul : $b = a - \dfrac{c^2}{2a}$			

LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

5. Sinus

Poser Tc / α		Sin α		Sin^2 α		Sin^3 α		Cosec Sin^2 α	
Valeur α	Ech	Ech	Mp	Ech	Mp	Ech	Mp	Ech	Mp
5° 45' à 90°	S	C	- 1	B1 B2	- 2 - 1	K1 K2 K3	- 3 - 2 - 1	C1	0
35° à 5° 45'	ST	C	- 2	B1 B2	- 4 - 3	K1 K2 K3	- 6 - 5 - 4	C1	+ 1
α < 35° ou α < 0,65 gr	α minutes : sin α = α' : ρ' ρ' = 3437 (Mp + 3) α secondes : sin α = α'' : ρ'' ρ'' + 206 265 (+ 5) sin α = α'' : ρ'' ρ'' = 6366 (Mp + 3 ou + 5)								
- -	Note : alignement des valeurs avec : Tc. Règle à double face Index Encoche – 10 D – 100 A . Règle Rietz.								
Spécial. 84° 15' à 90°	$\text{Sin } \alpha = 1 - 0{,}5 \left(\dfrac{90° - \alpha}{\rho' \;\; ou \;\; \rho''} \right)^2$								

Cosinus

1er calcul : cos α = sin (90° - α)
2e calcul : Lecture directe sur échelle P
Pose de α sur échelle S.
3e calcul : α < 5° 45' ; cos α = 1 - 0,5 α^2 (α radian).

LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

6. Tangente

Valeur α		tg α		tg^2 α		tg^3 α		Cotg α	
Poser	Ech	Ech	Mp	Ech	Mp	Ech	Mp	Ech	Mp
α < 35°	(Calcul) tg α = α' / ρ' ou : tg α = α'' / ρ''								
35' à 5° 45' Tc / α	ST	C	- 2	B1 B2	- 4 - 3	K1 K2 K3	- 6 - 5 - 4	CI	+ 1
5° 45' à 45° Tc / α	T	C	- 1	B1 B2	- 2 - 1	K1 K2 K3	- 3 - 2 - 1	CI	0
45° à 84° 15' 90° - α / 10 D	T	D / 1C	0	A1 / 1B A2 / 1B	0 + 1	K1 / 1C K2 / 1C K3 / 1C	0 + 1 + 2	C / 10D	- 1
84° 15' à 89° 25' 90° - α / 10 D	ST	D / 1C	+ 1	A1 / 1B A2 / 1B	+ 2 + 3	K1 / 1C K2 / 1C K3 / 1C	+ 3 + 4 + 5	C / 10D	- 2
89° 25' à 90°	(Calcul) tg α = ρ' / (90° - α') = ρ'' / (90° - α '').								
Note : α de 35' à 45° . Alignement des valeurs avec : - Tc. Règle à double face. - Index Encoche - 10 D - 100 A. Règle Rietz.									

7. Règle double face. Echelles spéciales.

I /Echelles décalées. CF, CIF et DF.

Produit π. *x*.   *x* / D et lire (π . *x*) / DF3 (Mp 0) ou / DF36 (Mp + 1).
Quotient *x* / π. Lire (*x* / π) / D avec Mp 0 (*x* / DF3) ou - 1 (*x* / DF36).
Produit lu et quotient posé entre index : 1CF et 1 DF on a :

- avec CF : Mp 0 (DF3) et ± 1 (DF36);
- avec CIF : ± 1 et 0 (d°).

II / Echelles log-log. $y = a^x$.

x > 0 Lire *y* mêmes LL que *a*   Ct *a* (ou *y*) = Indice de LL
x < 0 Lire *y* LL inverses de *a*   Mp ± 1 pour Index 10 (C ou CI)
Ct *y* = Ct *a* ± Ct *x* + Mp.

III / Echelles hyperboliques.

Lecture de la valeur des lignes sur échelle D avec
Mp - 1 pour sh1 et th, Mp 0 pour sh2 et ch = sh / th.

Formules de conversion : Argument complexe en forme vectorielle.

1°) Calcul de la forme vectorielle: r / φ

Ligne :	**tg φ =**	**r =**
sh (*x* + *jy*)	tg *y* / th *x*	$\dfrac{sh\,x \quad \cos y}{\cos\varphi}$
ch (*x* + *jy*)	tg *y* x th *x*	$\dfrac{sh\,x \quad \sin y}{\sin\varphi}$
sin (*x* + *jy*)	th *y* / tg *x*	$\dfrac{sh\,y \quad \cos x}{\sin\varphi}$
cos (*x* + *jy*)	- th *y* x tg *y*	$\dfrac{sh\,y \quad \sin x}{\sin\varphi}$

2^{0}) Calcul de l'argument : $x + jy$

Ligne :	**Hypoténuses H et *h*** ***a* = *r* cos φ** ***b* = *r* sin φ**	$\frac{H-h}{2}$	**sh:**
arg sh (r / φ)	$H^2 = a^2 + (1 + b)^2$ $h^2 = a^2 + (1 - b)^2$	sin y	sh x = a / cos y
arg ch(r / φ)	$H^2 = (1 + a)^2 + b^2$ $h^2 = (1 - a)^2 + b^2$	cos y	sh x = b / sin y
arg sin (r / φ)	- do -	sin x	sh y = b / cos x
arg cos (r / φ)	- do -	cos x	sh y = b / sin x
arg th (r / φ)	$th \quad 2x = \frac{2\cos\varphi}{\frac{1}{r+r}}$	$tg \quad 2y = \frac{2\sin\varphi}{\frac{1}{r+r}}$	
arg tg (r / φ)	$th \quad 2y = \frac{2\sin\varphi}{\frac{1}{r+r}}$	$tg \quad 2x = \frac{2\cos\varphi}{\frac{1}{r+r}}$	

8. Lignes hyperboliques.

I. - Calcul de : tg φ = tg y / th *x*.

Valeur de y :	**Poser :**	**tg φ / Ct**	**Lecture de φ**
0,57° à 5.7°	*y* ST / *x* th	10D – 2 1D - 2	*φ* ST / 10D *φ* T / 1 D
5,7° à 45°	*y* T / *x* th	10D - 1 1D 0	*φ* T / 10 D Lire : n / 10C puis : (90° - *φ*) T / *n* C
45° à 84,3°	(90° - *y*) T / 10D (90° - *y*) T / 1D	CI 0 CI + 1	(90° - *φ*) T / *x* th (90° - *φ*) ST / *x* th
84,3° à 89,4°	(90° - *y*) ST / 10D (90° -*y*) ST / 1D	CI + 1 CI +2	(90° - *φ*) ST / *x* th 10(90° - *φ*) ST / *x* th

II. - Calcul de tg *φ* = tg *y* x th *x*.

Valeur de y :	**Poser :**	**tg φ / Ct**	**Lecture de : φ**
0,57° à 5,7°	1C / *x* th et Tc / *y* ST 10C / *x* th et Tc / *y* ST	D/Tc - 3 D/Tc - 2	F.R. et 10 *φ* ST/Tc F.R. et *φ* ST/Tc
5,7° à 45°	1C / *x* th et Tc /*y* T 10C / *x* th et Tc /*y* T	D/Tc - 2 D/Tc - 1	F.R. et *φ* ST/Tc F.R. et *φ* T/Tc
45° à 84,3°	(90° - *y*) T / *x* th	10C -1 1C 0	*n* / 10C et *φ* T/n C (90° - *φ*) T / 10D

III. - Calcul de: tg *φ* = $\frac{th \quad y}{tg \quad x}$

Valeur de *x*:	**Poser :**	**tg φ /Ct**	**Lecture de:**
0,57° à 5,7°	*x* ST / *y* th	1C +1 10C 0	(90° - *φ*) ST / 10D (90° - *φ*) T / 1D
5,7° à 45°	*x* T / *y* th	1C 0 10C - 1	(90° - *φ*) T / 10D n / 10C et *φ* T / *n* C
45° à 84,30°	10C/*y* th & Tc / (90°-*x*)T 1C/*y* th & Tc / (90°-*x*)T	D/Tc - 1 D/Tc - 2	F.R. et *φ* T/Tc F.R. et *φ* ST/Tc
84,30° à 89,40°	10C/*y* th & Tc / (90°-*x*)ST 1C/*y* th & Tc / (90°-*x*)ST	D/Tc - 2 D/Tc - 3	F.R. et *φ* ST/Tc F.R. et 10 *φ* ST/Tc

F.R. = Fermer la règle sans bouger le Tc et lire :